

Tables pour faciliter l'application de la méthode des moindres carrés.

Communication présentée par M. **Vilfredo Pareto**, professeur à l'Université de Lausanne.

Introduction.

I.

La méthode des moindres carrés présente de grands avantages, mais elle donne lieu en général à des calculs longs et pénibles. Il est pourtant un cas où ces calculs se simplifient beaucoup, c'est celui où la variable croît selon une progression arithmétique.

Soit, en général, y une fonction de x , et proposons-nous de développer y en une série de la forme suivante

$$(1) \quad y = A_0 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + \dots$$

A_0, A_1, \dots sont des constantes. ψ_1, ψ_2, \dots sont des fonctions de x , qui jouissent des propriétés suivantes

$$(2) \quad \sum \psi_\theta = 0, \quad \sum \psi_\theta \psi_{\theta'} = 0,$$

quand θ est différent de θ' . Les sommes s'étendent à toutes les valeurs de x , dont le nombre est n .

Soient u_1, u_2, \dots des fonctions de x , nous pourrions poser

$$\begin{aligned} \psi_1 &= u_1 - \frac{\sum u_1}{n} \\ \psi_2 &= u_2 - \frac{\sum u_2 \psi_1}{\sum \psi_1^2} \psi_1 - \frac{\sum u_2}{n} \\ (3) \quad \psi_\theta &= u_\theta - \frac{\sum u_\theta \psi_{\theta-1}}{\sum \psi_{\theta-1}^2} \psi_{\theta-1} - \frac{\sum u_\theta \psi_{\theta-2}}{\sum \psi_{\theta-2}^2} \psi_{\theta-2} - \dots \\ &\dots \dots \dots \frac{\sum u_\theta}{n}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ces fonctions jouissent précisément des propriétés exprimées par les équations (2).

Si l'on multiplie successivement l'équation (1) par 1, ψ_1, ψ_2, \dots et que l'on somme, on aura

$$(4) \quad A_0 = \frac{\sum y}{n}, \quad A_1 = \frac{\sum y \psi_1}{\sum \psi_1^2}, \quad \dots \quad A_\theta = \frac{\sum y \psi_\theta}{\sum \psi_\theta^2}.$$

Les constantes ainsi déterminées rendent un minimum la somme des carrés des différences de y et d'un nombre quelconque de termes de la série (1). Posons, en effet,

$$X_h = A_0 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + \dots + A_h \psi_h.$$

La somme des carrés des écarts sera

$$E_h = \sum (y - X_h)^2;$$

pour la rendre minima, on la différenciera successivement par rapport à A_0, A_1, \dots, A_h , et l'on égalera à zéro ces expressions. On aura ainsi

$$\sum (y - X_h) = 0, \quad \sum \psi_1 (y - X_h) = 0, \dots$$

et l'on retombe précisément sur les valeurs (4) des constantes.

On a

$$y - X_h = A_{h+1} \psi_{h+1} + A_{h+2} \psi_{h+2} + \dots$$

et par conséquent

$$E_h = A_{h+1}^2 \sum \psi_{h+1}^2 + A_{h+2}^2 \sum \psi_{h+2}^2 + \dots$$

Substituant $h + 1$ à h et soustrayant, nous aurons

$$(5) \quad E_{h+1} = E_h - A_{h+1}^2 \sum \psi_{h+1}^2 = E_h - \frac{(\sum y \psi_{h+1})^2}{\sum \psi_{h+1}^2}.$$

Cette formule permet de calculer de proche en proche la somme des carrés des écarts.

Enfin, les équations (2) combinées avec les équations (3) donnent

$$(6) \quad \sum u_\theta \psi_\theta = \sum \psi_\theta^2, \quad \sum u_\theta \psi_{\theta+i} = 0,$$

i étant un entier positif quelconque.

Le cas le plus important est celui où l'on cherche un développement selon les puissances croissantes de la variable. Il faut alors faire

$$u_\theta = x^\theta.$$

II.

Supposons qu'on donne à la variable les valeurs

$$1, 2, 3, \dots, n;$$

on obtient de suite

$$\psi_1 = x - \frac{n+1}{2}.$$

Il est commode d'exprimer les autres ψ en fonctions de cette quantité, posons donc

$$(7) \quad z = x - \frac{n+1}{2}.$$

Quand n est un nombre pair, les valeurs de z sont égales numériquement deux à deux et de signes contraires. Il en est de même si n est un nombre impair, sauf une valeur de z , laquelle est zéro. Il suit de là que toutes les sommes des puissances impaires de z sont égales à zéro. Par conséquent, tous les ψ d'indice pair sont des fonctions paires de z , et tous les ψ d'indice impair sont des fonctions impaires de z .

On trouve facilement les valeurs des ψ pour les premiers indices, mais le calcul devient assez pénible pour les indices élevés. Il existe des propriétés de ces fonctions qui permettent de simplifier le calcul.

M. Tchébycheff a démontré qu'on avait

$$(8) \quad \psi_s = H_s A^s (x-1)(x-2)\dots(x-s)(x-n-1)\dots(x-n-s),$$

H_s étant une constante. Il trouve aussi

$$(9) \quad \psi_{s+1} = z \psi_s - \frac{s^2(n^2 - s^2)}{4(4s^2 - 1)} \psi_{s-1}.$$

Cette formule est assez commode pour calculer les valeurs successives de ψ_s . On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= z = x - \frac{n+1}{2}, \\ \psi_2 &= z^2 - \frac{n^2-1}{12} = x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \\ \psi_3 &= z^3 - \frac{3n^2-7}{20} z = x^3 - 3\frac{n+1}{2}x^2 + \\ &+ \frac{6n^2+15n+11}{10}x - \frac{n^3+6n^2+11n+6}{20}, \\ \psi_4 &= z^4 - \frac{3n^2-13}{14}z^2 + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}, \\ \psi_5 &= z^5 - 5\frac{n^2-7}{18}z^3 + \frac{15n^4-230n^2+407}{1008}z, \\ \psi_6 &= z^6 - 5\frac{3n^2-31}{44}z^4 + \frac{5n^4-110n^2+329}{176}z^2 - \\ &- 5\frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{14784}, \\ \psi_7 &= z^7 - 7\frac{3n^2-43}{52}z^5 + 7\frac{15n^4-450n^2+2051}{2288}z^3 - \\ &- \frac{35n^6-1645n^4+17297n^2-27207}{27456}z, \\ \psi_8 &= z^8 - 7\frac{n^2-19}{15}z^6 + 7\frac{3n^4-118n^2+763}{312}z^4 - \\ &- \frac{105n^6-6405n^4+91679n^2-231492}{34320}z^2 + \\ &+ 35\frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)(n^2-49)}{1647360}. \end{aligned}$$

Il est bon d'avoir la décomposition en facteurs des dénominateurs.

$$\begin{aligned} 14784 &= 64 \cdot 3 \cdot 77, & 27456 &= 64 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13, \\ 2288 &= 16 \cdot 11 \cdot 13, & 34320 &= 16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13, \\ 1647360 &= 64 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13. \end{aligned}$$

M. Tchébycheff donne une autre forme aux constantes A ; il trouve

$$(10) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1 \cdot 2 \dots (2s+1)}{1 \cdot 2 \dots s \cdot n(n^2-1) \dots (n^2-s^2)} \sum G_i A_i^s \\ G_i &= \frac{i(i+1) \dots (i+s-1)}{1 \cdot 2 \dots s} \\ &\quad \frac{(n-i) \dots (n-i-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s} \end{aligned}$$

La somme peut s'étendre de zéro à n , pourvu qu'on remplace par zéro les valeurs de G_i qui, selon l'équation (10), seraient négatives. Mais, en ce cas,

$$\sum G_i A^s y_i = (-1)^s \sum y_i A^s G_i;$$

et en comparant cette équation aux équations (4), nous obtenons

$$(11) \quad \psi_s = (-1)^s N_s A^s G_i,$$

N_s étant une constante. Cette formule est commode pour le calcul numérique des valeurs de ψ .

Le calcul des coefficients A au moyen des formules (10) est, en général, plus pénible qu'au moyen des formules (4). En effet, en employant les formules (10), nous devons: 1° Former les différences des y , ce qui est assez long, pour un rang élevé de ces différences. 2° Si les multiplications se font avec les logarithmes, chercher pour chaque A_s tous les logarithmes des $A^s y_i$ correspondants. Au lieu de cela, avec les formules (4), on emploie les valeurs de y directement; on cherche une fois pour toutes les logarithmes de y , et ils servent pour le calcul de tous les A_s . Il est pourtant un cas où les formules (10) peuvent rendre des services. Si les valeurs de y sont grandes et leurs différences sont petites, on peut avoir avantage à ne pas employer les logarithmes et à faire directement les multiplications des formules (10); au moins pour les premières valeurs de s . Mais il existe un autre moyen de se procurer des petits nombres, pour les multiplications.

Posons

$$\varepsilon_h = y - X = A_{h+1} \psi_{h+1} + A_{h+2} \psi_{h+2} + \dots$$

nous aurons

$$(12) \quad \sum y \psi_2 = \sum \varepsilon_1 \psi_2, \quad \sum y \psi_3 = \sum \varepsilon_2 \psi_3, \dots$$

c'est-à-dire qu'on peut substituer à y les écarts $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ pour le calcul des coefficients. On pourrait donc employer les formules

$$(13) \quad A_0 = \frac{\sum y}{n}, \quad A_1 = \frac{\sum \varepsilon_0 \psi_1}{\sum \psi_1^2}, \quad A_2 = \frac{\sum \varepsilon_1 \psi_2}{\sum \psi_2^2}, \\ A_3 = \frac{\sum \varepsilon_2 \psi_3}{\sum \psi_3^2}, \dots$$

Mais il est rare qu'on trouve quelque avantage à opérer ainsi: 1° Pour le calcul de chaque A , il faut chercher de nouveaux logarithmes. 2° Chaque valeur de A dépendant des valeurs des A d'indice moins élevé, les erreurs vont en s'accumulant. Les formules à appliquer ordinairement sont ou bien les formules (4), ou bien les formules

$$(14) \quad A_0 = \frac{\sum y}{n}, \quad A_1 = \frac{\sum \varepsilon_0 \psi_1}{\sum \psi_1^2}, \quad A_2 = \frac{\sum \varepsilon_1 \psi_2}{\sum \psi_2^2}, \\ A_3 = \frac{\sum \varepsilon_1 \psi_3}{\sum \psi_3^2}, \dots$$

Les calculs relatifs aux ψ sont de deux genres. Il nous faut, d'une part, calculer les valeurs numériques successives des ψ , pour les employer dans le calcul des A ; d'autre part, nous devons nous procurer les valeurs des coefficients des puissances de z , dans l'expression des ψ . Quant aux valeurs numériques des ψ , il convient d'avoir des nombres entiers ou avec un très petit nombre de décimales, et, pour cela, de multiplier les ψ par des constantes convenables. Si, P_s étant une constante, on pose

$$\psi'_s = P_s \psi_s,$$

et on obtient

$$(15) \quad A_s = P_s \frac{\sum \psi'_s y_s}{\sum \psi_s'^2}.$$

On a ainsi deux développements équivalents

$$y = A_0 + A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + \dots \\ y = B_0 + B_1 \psi'_1 + B_2 \psi'_2 + B_3 \psi'_3 + \dots$$

et on a les relations

$$A_s = P_s B_s, \quad \psi'_s = P_s \psi_s \\ A_s = \frac{\sum y \psi_s}{\sum \psi_s^2}, \quad B_s = \frac{\sum y \psi'_s}{\sum \psi_s'^2}$$

$$E_{h+1} = E_h - \frac{(\sum y \psi_{h+1})^2}{\sum \psi_{h+1}^2} = E_h - \frac{(\sum y \psi'_{h+1})^2}{\sum \psi'_{h+1}^2}.$$

Pour nous procurer les valeurs des coefficients des z^s dans le développement de y , il faut développer les ψ . Si nous posons

$$\psi_s = z^s - (s, s-2) z^{s-2} + (s, s-4) z^{s-4} - \dots$$

nous aurons

$$y = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + M_3 z^3 + \dots$$

et

$$M_0 = A_0 - (2.0) A_2 + (4.0) A_4 - \dots$$

$$M_1 = A_1 - (3.1) A_3 + (5.1) A_5 - \dots$$

$$M_2 = A_2 - (4.2) A_4 + (6.2) A_6 - \dots$$

$$\dots$$

III.

L'avantage que l'on trouve à faire les calculs dans le cas où les valeurs de y correspondent à des valeurs de x en progression arithmétique est tellement grand, qu'il peut convenir de ramener à ce cas des données qui n'y rentrent pas.

Supposons, par exemple, qu'on ait les valeurs de y qui correspondent aux valeurs

$$x = 1, 2, 4, 5, 6, 7.$$

Les valeurs de y ne correspondent pas à des valeurs de x en progression arithmétique, parce qu'il manque la valeur de y correspondant à $x = 3$. On peut la calculer approximativement, en faisant passer une parabole par les points 1, 2, 4, 5. Souvent il suffira même de considérer la parabole qui passe par 1, 2, 4 ou 2, 4, 5, et même la droite qui passe par 2, 4.

Il est des cas où l'on peut avoir des motifs de croire que y serait convenablement représentée par une fonction donnée

$$F(x, \alpha, \beta, \dots);$$

α, β, \dots étant des constantes à déterminer. La règle générale pour l'application de la méthode des moindres carrés conduit alors à résoudre les équations

$$(16) \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \alpha} (y - F) = 0, \quad \sum \frac{\partial F}{\partial \beta} (y - F) = 0, \dots$$

mais c'est là une opération qui, dans la plupart des cas, est une difficulté extrême, autant dire inexécutable.

Le système que nous croyons le meilleur consiste à développer F selon les puissances de z et à comparer ce développement avec celui que l'on obtient directement pour représenter y , avec la méthode des moindres carrés. Ces calculs sont néanmoins toujours assez longs.

Il est un cas remarquable où la détermination des constantes de F se simplifie beaucoup. C'est lorsqu'on a

$$F = A x^\alpha e^{\beta x};$$

en ce cas, en prenant les logarithmes naturels, et posant

$$K = \log A,$$

on a

$$\log F = K + \alpha \log x + \beta x.$$

L'expression

$$(17) \quad \log y - K - \alpha \log x - \beta x$$

est maintenant linéaire par rapport aux constantes à déterminer, et on peut lui appliquer facilement la méthode des moindres carrés. C'est ce qu'on fait souvent, et cela peut effectivement suffire en bien des cas; mais il en est d'autres où l'on n'obtient pas ainsi une représentation suffisamment approchée des y . En

effet, rendre un minimum la somme des carrés des écarts des logarithmes de y , n'est pas du tout la même chose que rendre un minimum la somme des carrés des écarts de y .

On peut porter remède à cet inconvénient par un moyen que nous avons indiqué dans un article publié, en novembre 1897, par le *Journal de la Société de statistique de Paris*.

L'application de la méthode des moindres carrés à l'expression (17) conduit aux équations

$$\begin{aligned} \Sigma \log y &= n K + \alpha \Sigma \log x + \beta \Sigma x \\ (18) \Sigma \log y \cdot \log x &= K \Sigma \log x + \alpha \Sigma (\log x)^2 + \beta \Sigma x \log x \\ \Sigma x \log y &= K \Sigma x + \alpha \Sigma x \log x + \beta \Sigma x^2. \end{aligned}$$

Au lieu de ces équations, il faut résoudre les équations qu'on déduit de l'expression

$$y \log y - K y - \alpha y \log x - \beta y x;$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Sigma y^2 \log y &= K \Sigma y^2 + \alpha \Sigma y^2 \log x + \beta \Sigma y^2 x \\ (19) \Sigma y^2 \log y \log x &= K \Sigma y^2 \log x + \alpha \Sigma (y \log x)^2 + \\ &\quad + \beta \Sigma y^2 x \log x \\ \Sigma y^2 x \log y &= K \Sigma y^2 x + \alpha \Sigma y^2 x \log x + \beta \Sigma y^2 x^2. \end{aligned}$$

Pour en voir la raison, posons

$$\omega = \log y - K - \alpha \log x - \beta x;$$

on aura

$$\frac{y}{A x^\alpha e^{\beta x}} = \frac{y}{F} = e^\omega, \quad y - F = F(e^\omega - 1)$$

$$y - F = y e^{-\omega} (e^\omega - 1) = y \omega T$$

$$T = \frac{e^{-\omega} (e^\omega - 1)}{\omega} = \frac{1 - e^{-\omega}}{\omega} = 1 - \frac{\omega}{1.2} + \frac{\omega^2}{1.2.3} - \dots$$

Si les écarts ω sont assez petits, T est fort proche de 1, et l'on peut poser simplement

$$y - F = y \omega.$$

Il faut rendre minima la somme des carrés de ces écarts, c'est-à-dire la somme

$$\Sigma y^2 \omega^2;$$

et, pour cela, il faut avoir

$$\Sigma y^2 \frac{\partial \omega}{\partial K} \omega = 0, \quad \Sigma y^2 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \omega = 0, \dots;$$

ce qui conduit précisément aux équations (19).

Tabl. I.

Valeurs des ψ'_s

$$\psi'_s = P^s \psi_s$$

| s | P_s | $\log P_s$ | s | $\frac{P_s}{77}$ | $\log P_s$ |
|-----|-------|----------------|-----|-------------------|--------------------------|
| 2 | 3 | 0.477 1212 547 | 6 | $\frac{60}{77}$ | 0.108 3394 748 |
| 3 | 1 | 0 | 7 | $\frac{143}{210}$ | $\bar{1}.833\ 1167\ 427$ |
| 4 | 7 | 0.845 0980 400 | 8 | $\frac{143}{448}$ | $\bar{1}.504\ 0580\ 235$ |
| 5 | 2.1 | 0.322 2192 947 | | | |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 | ψ'_7 | ψ'_8 |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $n = 4$ | | | | | | | |
| 1.5 | + 3 | + 0.3 | . | . | . | . | . |
| 0.5 | — 3 | — 0.9 | . | . | . | . | . |
| $n = 5$ | | | | | | | |
| 2 | + 6 | + 1.2 | + 2.4 | . | . | . | . |
| 1 | — 3 | — 2.4 | — 9.6 | . | . | . | . |
| 0 | — 6 | 0 | + 14.4 | . | . | . | . |
| $n = 6$ | | | | | | | |
| 2.5 | + 10 | + 3.0 | + 12 | + 1 | . | . | . |
| 1.5 | — 2 | — 4.2 | — 36 | — 5 | . | . | . |
| 0.5 | — 8 | — 2.4 | + 24 | + 10 | . | . | . |
| $n = 7$ | | | | | | | |
| 3 | + 15 | + 6 | + 36 | + 6 | + 1 | . | . |
| 2 | 0 | — 6 | — 84 | — 24 | — 6 | . | . |
| 1 | — 9 | — 6 | + 12 | + 30 | + 15 | . | . |
| 0 | — 12 | 0 | + 72 | 0 | — 20 | . | . |
| $n = 8$ | | | | | | | |
| 3.5 | + 21 | + 10.5 | + 84 | + 21 | + 7 | + 1 | . |
| 2.5 | + 3 | — 7.5 | — 156 | — 69 | — 35 | — 7 | . |
| 1.5 | — 9 | — 10.5 | — 36 | + 51 | + 63 | + 21 | . |
| 0.5 | — 15 | — 4.5 | + 108 | + 45 | — 35 | — 35 | . |
| $n = 9$ | | | | | | | |
| 4 | + 28 | + 16.8 | + 168 | + 56 | + 28 | + 8 | + 1 |
| 3 | + 7 | — 8.4 | — 252 | — 154 | — 119 | — 48 | — 8 |
| 2 | — 8 | — 15.6 | — 132 | + 56 | + 154 | + 112 | + 28 |
| 1 | — 17 | — 10.8 | + 108 | + 126 | + 7 | — 112 | — 56 |
| 0 | — 20 | 0 | + 216 | 0 | — 140 | 0 | + 70 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 | ψ'_7 | ψ'_8 |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $n = 10$ | | | | | | | |
| 4.5 | + 36 | + 25.2 | + 302.4 | + 126 | + 84 | + 36 | + 9 |
| 3.5 | + 12 | — 8.4 | — 369.6 | — 294 | — 308 | — 188 | — 63 |
| 2.5 | — 6 | — 21.0 | — 285.6 | + 21 | + 280 | + 344 | + 180 |
| 1.5 | — 18 | — 18.6 | + 50.4 | + 231 | + 168 | — 168 | — 252 |
| 0.5 | — 24 | — 7.2 | + 302.4 | + 126 | — 224 | — 224 | + 126 |
| $n = 11$ | | | | | | | |
| 5 | + 45 | + 36.0 | + 504 | + 252 | + 210 | + 120 | + 45 |
| 4 | + 18 | — 7.2 | — 504 | — 504 | — 672 | — 552 | — 279 |
| 3 | — 3 | — 26.4 | — 504 | — 84 | + 406 | + 792 | + 657 |
| 2 | — 18 | — 27.6 | — 84 | + 336 | + 504 | — 48 | — 612 |
| 1 | — 27 | — 16.8 | + 336 | + 336 | — 168 | — 672 | — 126 |
| 0 | — 30 | 0 | + 504 | 0 | — 560 | 0 | + 630 |
| $n = 12$ | | | | | | | |
| 5.5 | + 55 | + 49.5 | + 792 | + 462 | + 462 | + 330 | + 165 |
| 4.5 | + 25 | — 4.5 | — 648 | — 798 | — 1 302 | — 1 350 | — 915 |
| 3.5 | + 1 | — 31.5 | — 792 | — 294 | + 462 | + 1 506 | + 1 785 |
| 2.5 | — 17 | — 37.5 | — 312 | + 406 | + 1 050 | + 498 | — 975 |
| 1.5 | — 29 | — 28.5 | + 288 | + 616 | + 168 | — 1 224 | — 1 110 |
| 0.5 | — 35 | — 10.5 | + 672 | + 280 | — 840 | — 840 | + 1 050 |
| $n = 13$ | | | | | | | |
| 6 | + 66 | + 66 | + 1 188 | + 792 | + 924 | + 792 | + 495 |
| 5 | + 33 | 0 | — 792 | — 1 188 | — 2 310 | — 2 904 | — 2 475 |
| 4 | + 6 | — 36 | — 1 152 | — 648 | + 336 | + 2 472 | + 4 005 |
| 3 | — 15 | — 48 | — 648 | + 396 | + 1 806 | — 1 800 | — 855 |
| 2 | — 30 | — 42 | + 132 | + 936 | + 924 | — 1 560 | — 3 195 |
| 1 | — 39 | — 24 | + 768 | — 720 | — 840 | — 2 400 | + 450 |
| 0 | — 42 | 0 | + 1 008 | 0 | — 1 680 | 0 | + 3 150 |
| $n = 14$ | | | | | | | |
| 6.5 | + 78 | + 85.8 | + 1 716 | + 1 287 | + 1 716 | + 1 716 | + 1 287 |
| 5.5 | + 42 | + 6.6 | — 924 | — 1 683 | — 3 828 | — 5 676 | — 5 841 |
| 4.5 | + 12 | — 39.6 | — 1 584 | — 1 188 | — 132 | + 3 564 | + 7 821 |
| 3.5 | — 12 | — 58.8 | — 1 104 | + 252 | + 2 724 | + 4 236 | + 693 |
| 2.5 | — 30 | — 57.0 | — 156 | + 1 251 | + 2 220 | — 1 140 | — 6 435 |
| 1.5 | — 42 | — 40.2 | + 756 | + 1 305 | — 300 | — 4 500 | — 2 475 |
| 0.5 | — 48 | — 14.4 | + 1 296 | + 540 | — 2 400 | — 2 400 | + 4 950 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 | ψ'_7 | ψ'_8 |
|----------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $n = 15$ | | | | | | | |
| 7 | + 91 | + 109.2 | + 2 402.4 | + 2 002 | + 3 003 | + 3 432 | + 3 003 |
| 6 | + 52 | + 15.6 | -- 1 029.6 | -- 2 288 | -- 6 006 | -- 10 296 | -- 12 441 |
| 5 | + 19 | -- 42.0 | -- 2 085.6 | -- 1 958 | -- 1 155 | -- 4 488 | + 13 695 |
| 4 | -- 8 | -- 69.6 | -- 1 689.6 | -- 88 | + 3 696 | + 8 184 | + 5 181 |
| 3 | -- 29 | -- 73.2 | -- 597.6 | + 1 502 | + 4 137 | + 792 | -- 10 263 |
| 2 | -- 44 | -- 58.8 | + 602.4 | + 2 000 | + 1 050 | -- 6 600 | -- 9 075 |
| 1 | -- 53 | -- 32.4 | + 1 490.4 | + 1 350 | -- 2 625 | -- 6 600 | + 4 125 |
| 0 | -- 56 | 0 | + 1 814.4 | 0 | -- 4 200 | 0 | + 11 550 |
| $n = 16$ | | | | | | | |
| 7.5 | + 105 | + 136.5 | + 3 276 | + 3 003 | + 5 005 | + 6 435 | + 6 435 |
| 6.5 | + 63 | + 27.3 | -- 1 092 | -- 3 003 | -- 9 009 | -- 17 589 | -- 24 453 |
| 5.5 | + 27 | -- 42.9 | -- 2 652 | -- 3 003 | -- 3 003 | + 4 719 | + 21 879 |
| 4.5 | -- 3 | -- 80.1 | -- 2 412 | -- 693 | + 4 543 | + 13 959 | + 14 751 |
| 3.5 | -- 27 | -- 90.3 | -- 1 212 | + 1 617 | + 6 699 | + 5 181 | -- 13 167 |
| 2.5 | -- 45 | -- 79.5 | + 276 | + 2 751 | + 3 465 | -- 7 755 | -- 20 295 |
| 1.5 | -- 57 | -- 53.7 | + 1 548 | + 2 415 | -- 1 925 | -- 12 375 | -- 2 475 |
| 0.5 | -- 63 | -- 18.9 | + 2 268 | + 945 | -- 5 775 | -- 5 775 | + 17 325 |
| $n = 17$ | | | | | | | |
| 8 | + 120 | + 168 | + 4 368 | + 4 368 | + 8 008 | + 11 440 | + 12 870 |
| 7 | + 75 | + 42 | -- 1 092 | -- 3 822 | -- 13 013 | -- 28 600 | -- 45 045 |
| 6 | + 36 | -- 42 | -- 3 276 | -- 4 368 | -- 6 006 | + 3 432 | + 32 175 |
| 5 | + 3 | -- 90 | -- 3 276 | -- 1 638 | + 5 005 | + 21 736 | + 32 175 |
| 4 | -- 24 | -- 108 | -- 2 016 | + 1 512 | + 9 856 | + 13 112 | -- 12 375 |
| 3 | -- 45 | -- 102 | -- 252 | + 3 486 | + 7 161 | -- 6 600 | -- 36 135 |
| 2 | -- 60 | -- 78 | + 1 428 | + 3 696 | + 154 | -- 18 920 | -- 18 315 |
| 1 | -- 69 | -- 42 | + 2 604 | + 2 310 | -- 6 545 | -- 15 400 | + 17 325 |
| 0 | -- 72 | 0 | + 3 024 | 0 | -- 9 240 | 0 | + 34 650 |
| $n = 18$ | | | | | | | |
| 8.5 | + 136 | + 204 | + 5 712 | + 6 188 | + 12 376 | + 19 448 | + 24 310 |
| 7.5 | + 88 | + 60 | -- 1 008 | -- 4 732 | -- 18 200 | -- 44 616 | -- 78 650 |
| 6.5 | + 46 | -- 39 | -- 3 948 | -- 6 097 | -- 10 556 | -- 572 | + 43 615 |
| 5.5 | + 10 | -- 99 | -- 4 284 | -- 3 003 | + 4 732 | + 31 460 | + 60 775 |
| 4.5 | -- 20 | -- 126 | -- 3 024 | + 1 092 | + 13 468 | + 25 740 | -- 3 575 |
| 3.5 | -- 44 | -- 126 | -- 1 008 | + 4 116 | + 12 292 | -- 1 364 | -- 55 055 |
| 2.5 | -- 62 | -- 105 | + 1 092 | + 5 131 | + 4 060 | -- 24 772 | -- 46 475 |
| 1.5 | -- 74 | -- 69 | + 2 772 | + 4 081 | -- 5 852 | -- 28 644 | + 5 005 |
| 0.5 | -- 80 | -- 24 | + 3 696 | + 1 540 | -- 12 320 | -- 12 320 | + 50 050 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 | ψ'_7 | ψ'_8 |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $n = 19$ | | | | | | | |
| 9 | + 153 | + 244.8 | + 7 344 | + 8 568 | + 18 564 | + 31 824 | + 43 758 |
| 8 | + 102 | + 81.6 | — 816 | — 5 712 | — 24 752 | — 67 184 | — 131 274 |
| 7 | + 57 | — 33.6 | — 4 656 | — 8 232 | — 17 108 | — 8 944 | + 54 054 |
| 6 | + 18 | — 106.8 | — 5 436 | — 4 872 | + 3 276 | + 42 744 | + 104 247 |
| 5 | — 15 | — 144.0 | — 4 248 | + 252 | + 17 290 | + 44 200 | + 19 305 |
| 4 | — 42 | — 151.2 | — 2 016 | + 4 536 | + 18 928 | + 10 088 | — 73 359 |
| 3 | — 63 | — 134.4 | + 504 | + 6 636 | + 10 206 | — 27 768 | — 88 803 |
| 2 | — 78 | — 99.6 | + 2 724 | + 6 216 | — 2 996 | — 44 408 | — 27 027 |
| 1 | — 87 | — 52.8 | + 4 224 | + 3 696 | — 14 168 | — 32 032 | + 54 054 |
| 0 | — 90 | 0 | + 4 752 | 0 | — 18 480 | 0 | + 90 090 |
| $n = 20$ | | | | | | | |
| 9.5 | + 171 | + 290.7 | + 9 302.4 | + 11 628 | + 27 132 | + 50 388 | + 75 582 |
| 8.5 | + 117 | + 107.1 | — 489.6 | — 6 732 | — 32 844 | — 98 124 | — 210 834 |
| 7.5 | + 69 | — 25.5 | — 5 385.6 | — 10 812 | — 26 180 | — 23 868 | + 59 670 |
| 6.5 | + 27 | — 113.1 | — 6 729.6 | — 7 332 | + 84 | + 54 756 | + 166 374 |
| 5.5 | — 9 | — 161.7 | — 5 697.6 | — 1 122 | + 20 958 | + 69 498 | + 64 233 |
| 4.5 | — 39 | — 177.3 | — 3 297.6 | + 4 626 | + 27 034 | + 30 186 | — 84 591 |
| 3.5 | — 63 | — 165.9 | — 369.6 | + 8 106 | + 18 942 | — 25 038 | — 144 963 |
| 2.5 | — 81 | — 133.5 | + 2 414.4 | + 8 646 | + 2 730 | — 60 606 | — 85 995 |
| 1.5 | — 93 | — 86.1 | + 4 550.4 | + 6 456 | — 13 832 | — 58 968 | + 34 398 |
| 0.5 | — 99 | — 29.7 | + 5 702.4 | + 2 376 | — 24 024 | — 34 024 | + 126 126 |
| $n = 21$ | | | | | | | |
| 10 | + 190 | + 342.0 | + 11 628 | + 15 504 | + 38 760 | + 77 520 | + 125 970 |
| 9 | + 133 | + 136.8 | 0 | — 7 752 | — 42 636 | — 139 536 | — 327 522 |
| 8 | + 82 | — 14.4 | — 6 120 | — 13 872 | — 38 352 | — 48 144 | + 54 366 |
| 7 | + 37 | — 117.6 | — 8 160 | — 10 472 | — 5 508 | + 66 096 | — 250 614 |
| 6 | — 2 | — 178.8 | — 7 380 | — 3 152 | + 23 976 | + 102 384 | + 141 102 |
| 5 | — 35 | — 204.0 | — 4 872 | + 4 252 | + 36 450 | + 61 560 | — 78 975 |
| 4 | — 62 | — 199.2 | — 1 560 | + 9 416 | + 30 528 | — 13 032 | — 211 419 |
| 3 | — 83 | — 170.4 | + 1 800 | + 11 276 | + 12 006 | — 74 088 | — 177 723 |
| 2 | — 98 | — 123.6 | + 4 620 | + 9 776 | — 10 296 | — 91 728 | — 22 932 |
| 1 | — 107 | — 64.8 | + 6 480 | + 5 616 | + 27 768 | — 61 152 | + 141 414 |
| 0 | — 110 | 0 | + 7 128 | 0 | — 34 320 | 0 | + 210 210 |
| $n = 22$ | | | | | | | |
| 10.5 | + 210 | + 399 | + 14 364 | + 20 349 | + 54 264 | + 116 280 | + 203 490 |
| 9.5 | + 150 | + 171 | + 684 | — 8 721 | — 54 264 | — 193 800 | — 494 190 |
| 8.5 | + 96 | 0 | — 6 840 | — 17 442 | — 54 264 | — 85 272 | + 29 070 |
| 7.5 | + 48 | — 120 | — 9 720 | — 14 382 | — 14 280 | + 74 664 | + 359 550 |
| 6.5 | + 6 | — 195 | — 9 300 | — 5 967 | + 25 704 | + 143 208 | + 261 630 |
| 5.5 | — 30 | — 231 | — 6 756 | + 3 267 | + 46 872 | + 106 920 | — 42 930 |
| 4.5 | — 60 | — 234 | — 3 096 | + 10 422 | + 45 108 | + 12 420 | — 280 395 |
| 3.5 | — 84 | — 210 | + 840 | + 13 986 | + 25 452 | — 80 604 | — 305 235 |
| 2.5 | — 102 | — 165 | + 4 380 | + 13 581 | — 2 520 | — 127 512 | — 132 300 |
| 1.5 | — 114 | — 105 | + 7 020 | + 9 711 | — 28 392 | — 111 384 | + 114 660 |
| 0.5 | — 120 | — 36 | + 8 424 | + 3 510 | — 43 680 | — 43 680 | + 286 650 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 | ψ'_7 | ψ'_8 |
|----------------------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $n = 23$ | | | | | | | |
| 11 | + 231 | + 462 | + 17 556 | + 26 334 | + 74 613 | + 170 544 | + 319 770 |
| 10 | + 168 | + 210 | + 1 596 | — 9 576 | — 67 830 | — 263 568 | — 726 750 |
| 9 | + 111 | + 18 | — 7 524 | — 21 546 | — 74 613 | — 139 536 | — 29 070 |
| 8 | + 60 | — 120 | — 11 400 | — 19 152 | — 27 132 | + 77 520 | + 494 190 |
| 7 | + 15 | — 210 | — 11 460 | — 9 702 | + 25 347 | + 191 760 | + 439 110 |
| 6 | — 24 | — 258 | — 8 964 | + 1 512 | + 57 834 | + 168 912 | + 41 310 |
| 5 | — 57 | — 270 | — 5 004 | + 10 962 | + 62 685 | + 56 016 | — 338 850 |
| 4 | — 84 | — 252 | — 504 | + 16 632 | + 43 596 | — 74 808 | — 467 235 |
| 3 | — 105 | — 210 | + 3 780 | + 17 766 | + 10 521 | — 162 000 | — 306 720 |
| 2 | — 120 | — 150 | + 7 260 | + 14 616 | — 24 486 | — 173 040 | + 21 420 |
| 1 | — 129 | — 78 | + 9 516 | + 8 190 | — 50 505 | — 109 200 | + 327 600 |
| 0 | — 132 | 0 | + 10 296 | 0 | — 60 060 | 0 | + 450 450 |
| $n = 24$ | | | | | | | |
| 11.5 | + 253 | + 531.3 | + 21 252 | + 33 649 | + 100 947 | + 245 157 | + 490 314 |
| 10.5 | + 187 | + 254.1 | + 2 772 | — 10 241 | — 83 391 | — 351 747 | — 1 044 582 |
| 9.5 | + 127 | + 39.9 | — 8 148 | — 26 201 | — 100 149 | — 216 087 | — 137 598 |
| 8.5 | + 73 | — 117.3 | — 13 188 | — 24 871 | — 45 087 | + 70 737 | + 653 106 |
| 7.5 | + 25 | — 223.5 | — 13 860 | — 14 497 | + 21 945 | + 247 095 | + 687 990 |
| 6.5 | — 17 | — 284.7 | — 11 508 | — 1 183 | + 68 691 | + 249 951 | + 195 942 |
| 5.5 | — 53 | — 306.9 | — 7 308 | + 10 857 | + 83 097 | + 122 859 | — 367 506 |
| 4.5 | — 83 | — 296.1 | — 2 268 | + 19 047 | + 66 843 | — 50 301 | — 656 514 |
| 3.5 | — 107 | — 258.3 | + 2 272 | + 22 197 | + 29 799 | — 189 279 | — 555 912 |
| 2.5 | — 125 | — 199.5 | + 7 140 | + 20 251 | — 14 595 | — 242 535 | — 164 040 |
| 1.5 | — 137 | — 125.7 | + 10 332 | + 14 035 | — 53 025 | — 196 875 | + 298 200 |
| 0.5 | — 143 | — 42.9 | + 12 012 | + 5 005 | — 75 075 | — 75 075 | + 600 600 |
| $n = 25$ | | | | | | | |
| 12 | + 276 | + 607.2 | + 25 502.4 | + 42 504 | + 134 596 | + 346 104 | + 735 471 |
| 11 | + 207 | + 303.6 | + 4 250.4 | — 10 626 | — 100 947 | — 461 472 | — 1 470 942 |
| 10 | + 144 | + 66.0 | — 8 685.6 | — 31 416 | — 131 670 | — 321 024 | — 319 770 |
| 9 | + 87 | — 111.6 | — 15 069.6 | — 31 626 | — 69 293 | + 49 248 | + 831 402 |
| 8 | + 36 | — 235.2 | — 16 497.6 | — 20 496 | + 14 364 | + 307 344 | + 1 023 264 |
| 7 | — 9 | — 310.8 | — 14 397.6 | — 4 998 | + 78 603 | + 352 032 | + 447 678 |
| 6 | — 48 | — 344.4 | — 10 029.6 | + 9 912 | + 105 994 | + 218 304 | — 339 966 |
| 5 | — 81 | — 342.0 | — 4 485.6 | + 21 042 | + 95 445 | + 288 | — 858 330 |
| 4 | — 108 | — 309.6 | + 1 310.4 | + 26 712 | + 56 196 | — 201 816 | — 884 169 |
| 3 | — 129 | — 253.2 | + 6 602.4 | + 26 502 | + 2 737 | — 314 208 | — 466 488 |
| 2 | — 144 | — 178.8 | + 10 802.4 | + 21 000 | — 49 350 | — 304 800 | + 158 400 |
| 1 | — 153 | — 92.4 | + 13 490.4 | + 11 550 | — 86 625 | — 184 800 | + 693 000 |
| 0 | — 156 | 0 | + 14 414.4 | 0 | — 100 100 | 0 | + 900 900 |

Tabl. II. Valeur des logarithmes des ψ' , depuis $n = 10$ jusqu'à $n = 25$.

| z | $\log \psi'_2$ | $\log \psi'_3$ | $\log \psi'_4$ | $\log \psi'_5$ | $\log \psi'_6$ | $\log \psi'_7$ | $\log \psi'_8$ |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $n = 10$ | | | | | | | |
| 4.5 | 1.556 3025 | 1.401 4005 | 2.480 5818 | 2.100 3705 | 1.924 2793 | 1.556 3025 | 0.954 2425 |
| 3.5 | 1.079 1812 | 0.924 2793 | 2.567 7320 | 2.468 3473 | 2.488 5507 | 2.274 1578 | 1.799 3405 |
| 2.5 | 0.778 1513 | 1.322 2193 | 2.455 7582 | 1.322 2193 | 2.447 1580 | 2.536 5584 | 2.255 2725 |
| 1.5 | 1.255 2725 | 1.269 5129 | 1.702 4305 | 2.363 6120 | 2.225 3093 | 2.225 3093 | 2.401 4005 |
| 0.5 | 1.380 2112 | 0.857 3325 | 2.480 5818 | 2.100 3705 | 2.350 2480 | 2.350 2480 | 2.100 3705 |
| $n = 11$ | | | | | | | |
| 5 | 1.653 2125 | 1.556 3025 | 2.702 4305 | 2.401 4005 | 2.322 2193 | 2.079 1812 | 1.653 2125 |
| 4 | 1.255 2725 | 0.857 3325 | 2.702 4305 | 2.702 4305 | 2.827 3693 | 2.741 9391 | 2.445 6042 |
| 3 | 0.477 1213 | 1.421 6039 | 2.702 4305 | 1.924 2793 | 2.608 5260 | 2.898 7252 | 2.817 5654 |
| 2 | 1.255 2725 | 1.440 9091 | 1.924 2793 | 2.526 3393 | 2.702 4305 | 1.681 2412 | 2.786 7514 |
| 1 | 1.431 3638 | 1.225 3093 | 2.526 3393 | 2.526 3393 | 2.225 3093 | 2.827 3693 | 2.100 3705 |
| 0 | 1.477 1213 | . | 2.702 4305 | . | 2.748 1880 | . | 2.799 3405 |
| $n = 12$ | | | | | | | |
| 5.5 | 1.740 3627 | 1.694 6052 | 2.898 7252 | 2.664 6420 | 2.664 6420 | 2.518 5139 | 2.217 4839 |
| 4.5 | 1.397 9400 | 0.653 2125 | 2.811 5750 | 2.902 0029 | 3.114 6110 | 3.130 3338 | 2.961 4211 |
| 3.5 | 0.000 0000 | 1.498 3106 | 2.898 7252 | 2.468 3473 | 2.664 6420 | 3.177 8250 | 3.251 6382 |
| 2.5 | 1.230 4489 | 1.574 0313 | 2.494 1546 | 2.608 5260 | 3.021 1893 | 2.697 2293 | 2.989 0046 |
| 1.5 | 1.462 3980 | 1.454 8449 | 2.459 3925 | 2.789 5807 | 2.225 3093 | 3.087 7814 | 3.045 3230 |
| 0.5 | 1.544 0680 | 1.021 1893 | 2.827 3693 | 2.447 1580 | 2.924 2793 | 2.924 2793 | 3.021 1893 |
| $n = 13$ | | | | | | | |
| 6 | 1.819 5439 | 1.819 5439 | 3.074 8164 | 2.898 7252 | 2.965 6720 | 2.898 7252 | 2.694 6052 |
| 5 | 1.518 5139 | . | 1.898 7252 | 3.074 8164 | 3.363 6120 | 3.462 9966 | 3.393 5752 |
| 4 | 0.778 1513 | 1.556 3025 | 3.061 4525 | 2.811 5750 | 2.526 3393 | 3.393 0485 | 3.602 6025 |
| 3 | 1.176 0913 | 1.681 2412 | 2.811 5750 | 2.597 6952 | 3.256 7177 | 3.255 2725 | 2.931 9661 |
| 2 | 1.477 1213 | 1.623 2493 | 2.120 5739 | 2.971 2758 | 2.965 6720 | 3.193 1246 | 3.504 4709 |
| 1 | 1.591 0646 | 1.380 2112 | 2.885 3612 | 2.857 3325 | 3.924 2793 | 3.380 2112 | 2.653 2125 |
| 0 | 1.623 2493 | . | 3.003 4605 | . | 3.225 3093 | . | 3.498 3106 |
| $n = 14$ | | | | | | | |
| 6.5 | 1.892 0946 | 1.933 4873 | 3.234 5173 | 3.109 5785 | 3.234 5173 | 3.234 5173 | 3.109 5785 |
| 5.5 | 1.623 2493 | 0.819 5439 | 2.965 6720 | 3.226 0841 | 3.582 9719 | 3.754 0424 | 3.766 4872 |
| 4.5 | 1.079 1812 | 1.597 6952 | 3.199 7552 | 3.074 8164 | 2.120 5739 | 3.551 9377 | 3.893 2623 |
| 3.5 | 1.079 1812 | 1.769 3773 | 3.042 9691 | 2.401 4005 | 3.435 2071 | 3.626 9560 | 2.840 7332 |
| 2.5 | 1.477 1213 | 1.755 8749 | 2.193 1246 | 3.097 2573 | 3.346 3530 | 3.056 9049 | 3.808 5486 |
| 1.5 | 1.623 2493 | 1.604 2261 | 2.878 5218 | 3.115 6105 | 2.477 1213 | 3.653 2125 | 3.393 5752 |
| 0.5 | 1.681 2412 | 1.158 3625 | 3.112 6050 | 2.732 3938 | 3.380 2112 | 3.380 2112 | 3.694 6052 |

| z | $\log \psi'_2$ | $\log \psi'_3$ | $\log \psi'_4$ | $\log \psi'_5$ | $\log \psi'_6$ | $\log \psi'_7$ | $\log \psi'_8$ |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $n = 15$ | | | | | | | |
| 7 | 1.959 0414 | 2.038 2226 | 3.380 6453 | 3.301 4641 | 3.477 5553 | 3.535 5473 | 3.477 5553 |
| 6 | 1.716 0033 | 1.193 1246 | 3.012 6685 | 3.359 4560 | 3.778 5853 | 4.012 6685 | 4.094 8553 |
| 5 | 1.278 7536 | 1.623 2493 | 3.319 2310 | 3.291 8127 | 3.062 5820 | 3.652 0528 | 4.136 5620 |
| 4 | 0.903 0900 | 1.842 6092 | 3.227 7839 | 1.944 4827 | 3.567 7320 | 3.912 9656 | 3.714 4136 |
| 3 | 1.462 3980 | 1.864 5111 | 2.776 4106 | 3.176 6699 | 3.616 6855 | 3.898 7252 | 4.011 2743 |
| 2 | 1.643 4527 | 1.769 3773 | 2.779 8850 | 3.301 0300 | 3.021 1893 | 3.819 5439 | 3.957 8466 |
| 1 | 1.724 2759 | 1.510 5450 | 3.173 3028 | 3.130 3338 | 3.419 1293 | 3.819 5439 | 3.615 4240 |
| 0 | 1.748 1880 | . | 3.258 7330 | . | 3.623 2493 | . | 4.062 5820 |
| $n = 16$ | | | | | | | |
| 7.5 | 2.021 1893 | 2.135 1327 | 3.515 3439 | 3.477 5553 | 3.699 4041 | 3.808 5486 | 3.808 5486 |
| 6.5 | 1.799 3405 | 1.436 1626 | 3.038 2226 | 3.477 5553 | 3.954 6766 | 4.245 2411 | 4.388 3321 |
| 5.5 | 1.431 3638 | 1.632 4573 | 3.423 5735 | 3.477 5553 | 3.477 5553 | 3.673 8500 | 4.340 0275 |
| 4.5 | 0.477 1213 | 1.903 6325 | 3.382 3773 | 2.840 7332 | 3.657 3427 | 4.144 8543 | 4.168 8215 |
| 3.5 | 1.431 3638 | 1.955 6878 | 3.083 5026 | 3.208 7100 | 3.826 0100 | 3.714 4136 | 4.119 4868 |
| 2.5 | 1.653 2125 | 1.900 3671 | 2.440 9091 | 3.439 4906 | 3.539 7032 | 3.889 5818 | 4.307 3891 |
| 1.5 | 1.755 8749 | 1.729 9743 | 3.189 7710 | 3.382 9171 | 3.284 4307 | 4.092 5452 | 3,393 5752 |
| 0.5 | 1.799 3405 | 1.276 4618 | 3.355 6431 | 2.975 4318 | 3.761 5520 | 3.761 5520 | 4.238 6732 |
| $n = 17$ | | | | | | | |
| 8 | 2.079 1812 | 2.225 3093 | 3.640 2826 | 3.640 2826 | 3.903 5241 | 4.058 4260 | 4.109 5785 |
| 7 | 1.875 0613 | 1.623 2493 | 3.038 2226 | 3.582 2907 | 4.114 3774 | 4.456 3660 | 4.653 6466 |
| 6 | 1.556 3025 | 1.623 2493 | 3.515 3439 | 3.640 2826 | 3.778 5853 | 3.535 5473 | 4.507 5186 |
| 5 | 0.477 1213 | 1.954 2425 | 3.515 3439 | 3.214 3139 | 3.699 4041 | 4.337 1796 | 4.507 5186 |
| 4 | 1.380 2112 | 2.033 4238 | 3.304 4905 | 3.179 5518 | 3.993 7007 | 4.117 6689 | 4.092 5452 |
| 3 | 1.653 2125 | 2.008 6002 | 2.401 4005 | 3.542 3274 | 3.854 9737 | 3.819 5439 | 4.557 9281 |
| 2 | 1.778 1513 | 1.892 0946 | 3.154 7282 | 3.567 7320 | 2.187 5207 | 4.276 9211 | 4.262 8069 |
| 1 | 1.838 8491 | 1.623 2493 | 3.415 6410 | 3.363 6120 | 3.815 9097 | 4.187 5207 | 4.238 6732 |
| 0 | 1.857 3325 | . | 3.480 5818 | . | 3.965 6720 | . | 4.539 7032 |
| $n = 18$ | | | | | | | |
| 8.5 | 2.133 5389 | 2.309 6302 | 3.756 7882 | 3.791 5503 | 4.092 5803 | 4.288 8749 | 4.385 7850 |
| 7.5 | 1.944 4827 | 1.778 1513 | 3.003 4605 | 3.675 0447 | 4.260 0714 | 4.649 4906 | 4.895 6987 |
| 6.5 | 1.662 7578 | 1.591 0646 | 3.596 3771 | 3.785 1162 | 4.023 4994 | 2.757 3960 | 4.639 6359 |
| 5.5 | 1.000 0000 | 1.995 6352 | 3.631 8495 | 3.477 5553 | 3.675 0447 | 4.497 7587 | 4.783 7250 |
| 4.5 | 1.301 0300 | 2.100 3705 | 3.480 5818 | 3.038 2226 | 4.129 3031 | 4.410 6085 | 3.553 2760 |
| 3.5 | 1.643 4527 | 2.100 3705 | 3.003 4605 | 3.614 4754 | 4.089 6226 | 3.134 8144 | 4.740 7968 |
| 2.5 | 1.792 3917 | 2.021 1893 | 3.038 2226 | 3.710 2020 | 3.608 5260 | 4.393 9611 | 4.667 2194 |
| 1.5 | 1.869 2317 | 1.838 8491 | 3.442 7932 | 3.610 7666 | 3.767 3043 | 4.457 0337 | 3.699 4041 |
| 0.5 | 1.903 0900 | 1.380 2112 | 3.567 7320 | 3.187 5207 | 4.090 6107 | 4.090 6107 | 4.699 4041 |

| z | $\log \psi'_2$ | $\log \psi'_3$ | $\log \psi'_4$ | $\log \psi'_5$ | $\log \psi'_6$ | $\log \psi'_7$ | $\log \psi'_8$ |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $n = 19$ | | | | | | | |
| 9 | 2.184 6914 | 2.388 8114 | 3.865 9327 | 3.932 8795 | 4.268 6716 | 4.502 7548 | 4.641 0575 |
| 8 | 2.008 6002 | 1.911 6902 | 2.911 6902 | 3.756 7882 | 4.393 6103 | 4.827 2659 | 5.118 1787 |
| 7 | 1.755 8749 | 1.526 3393 | 3.668 0130 | 3.915 5054 | 4.233 1992 | 3.951 5318 | 4.732 8278 |
| 6 | 1.255 2725 | 2.028 5713 | 3.735 2794 | 3.687 7073 | 3.515 3439 | 4.630 8752 | 5.018 0636 |
| 5 | 1.176 0913 | 2.158 3625 | 3.628 1845 | 2.401 4005 | 4.237 7950 | 4.645 4223 | 4.285 6698 |
| 4 | 1.623 2493 | 2.179 5518 | 3.304 4905 | 3.656 6730 | 4.277 1047 | 4.003 8051 | 4.865 4534 |
| 3 | 1.799 3405 | 2.128 3993 | 2.702 4305 | 3.821 9064 | 4.008 8556 | 4.443 5446 | 4.948 4276 |
| 2 | 1.892 0946 | 1.998 2593 | 3.435 2071 | 3.793 5110 | 3.476 5418 | 4.647 4612 | 4.431 7978 |
| 1 | 1.939 5193 | 1.722 6339 | 3.625 7239 | 3.567 7320 | 4.151 3085 | 4.505 5841 | 4.732 8278 |
| 0 | 1.954 2425 | . | 3.676 8764 | . | 4.266 7020 | . | 4.954 6766 |
| $n = 20$ | | | | | | | |
| 9.5 | 2.232 9961 | 2.463 4450 | 3.968 5950 | 4.065 5050 | 4.433 4818 | 4.702 3271 | 4.878 4184 |
| 8.5 | 2.068 1859 | 2.029 7895 | 2.689 8414 | 3.828 1441 | 4.516 4560 | 4.991 7752 | 5.323 9406 |
| 7.5 | 1.838 8491 | 1.406 5402 | 3.731 2341 | 4.033 9060 | 4.417 9696 | 4.377 8160 | 4.775 7560 |
| 6.5 | 1.431 3638 | 2.053 4626 | 3.827 9893 | 3.865 2225 | 1.924 2793 | 4.738 4317 | 5.221 0855 |
| 5.5 | 0.954 2425 | 2.208 7100 | 3.755 6920 | 3.049 9929 | 4.321 3498 | 4.841 9723 | 4.807 7582 |
| 4.5 | 1.591 0646 | 2.248 7087 | 3.518 1980 | 3.665 2056 | 4.431 9103 | 4.479 8056 | 4.927 3242 |
| 3.5 | 1.799 3405 | 2.219 8464 | 2.567 7320 | 3.908 8066 | 4.277 4258 | 4.398 5996 | 5.161 2571 |
| 2.5 | 1.908 4850 | 2.125 4813 | 3.382 8092 | 3.936 8152 | 3.436 1626 | 4.782 5156 | 4.934 4732 |
| 1.5 | 1.968 4829 | 1.935 0032 | 3.658 0496 | 3.809 9635 | 4.140 8850 | 4.770 6164 | 4.536 5332 |
| 0.5 | 1.995 6352 | 1.472 7564 | 3.756 0577 | 3.375 8464 | 4.380 6453 | 4.531 7854 | 5.100 8046 |
| $n = 21$ | | | | | | | |
| 10 | 2.278 7536 | 2.534 0261 | 4.065 5050 | 4.190 4438 | 4.588 3838 | 4.889 4138 | 5.100 2671 |
| 9 | 2.123 8516 | 2.136 0861 | . | 3.889 4138 | 4.629 7765 | 5.144 6863 | 5.515 2405 |
| 8 | 1.913 8139 | 1.158 3625 | 4.786 7514 | 4.142 1391 | 4.583 7880 | 4.682 5422 | 4.735 3274 |
| 7 | 1.568 2017 | 2.070 4073 | 4.911 6902 | 4.020 0296 | 3.740 9939 | 4.820 1752 | 5.399 0053 |
| 6 | 0.301 0300 | 2.252 3675 | 4.868 0564 | 3.498 5862 | 4.379 7767 | 5.010 2321 | 5.149 5332 |
| 5 | 1.544 0680 | 2.309 6302 | 4.687 7073 | 3.628 5933 | 4.561 6975 | 4.789 2986 | 4.897 4896 |
| 4 | 1.792 3917 | 2.299 2893 | 3.193 1246 | 3.973 8664 | 4.484 6984 | 4.115 0111 | 5.325 1440 |
| 3 | 1.919 0781 | 2.231 4696 | 3.255 2725 | 4.052 1551 | 4.079 3983 | 4.869 7479 | 5.249 7436 |
| 2 | 1.991 2261 | 2.092 0185 | 4.664 6420 | 3.990 1612 | 4.012 6685 | 4.962 5019 | 4.360 4419 |
| 1 | 2.029 3838 | 1.811 5750 | 4.811 5750 | 3.749 4271 | 4.443 5446 | 4.786 4107 | 5.150 4924 |
| 0 | 2.041 3927 | . | 4.852 9677 | . | 4.535 5473 | . | 5.322 6534 |
| $n = 22$ | | | | | | | |
| 10.5 | 2.322 2193 | 2.600 9729 | 4.157 2754 | 4.308 5431 | 4.734 5118 | 5.065 5050 | 5.308 5431 |
| 9.5 | 2.176 0913 | 2.232 9961 | 2.835 0561 | 3.940 5663 | 4.734 5118 | 5.287 3538 | 5.693 8940 |
| 8.5 | 1.982 2712 | . | 3.835 0561 | 4.241 5963 | 4.734 5118 | 4.930 8064 | 4.463 4450 |
| 7.5 | 1.681 2412 | 2.079 1812 | 3.987 6663 | 4.157 8193 | 4.154 7282 | 4.873 1113 | 5.555 7593 |
| 6.5 | 0.778 1513 | 2.290 0346 | 3.968 4829 | 3.775 7560 | 4.410 0007 | 5.155 9673 | 5.417 6875 |
| 5.5 | 1.477 1213 | 2.363 6120 | 3.829 6896 | 3.514 1491 | 4.670 9135 | 5.029 0590 | 4.632 7609 |
| 4.5 | 1.778 1513 | 2.369 2159 | 3.490 8010 | 4.017 9511 | 4.654 2536 | 4.094 1216 | 5.447 7703 |

| z | $\log \psi'_2$ | $\log \psi'_3$ | $\log \psi'_4$ | $\log \psi'_5$ | $\log \psi'_6$ | $\log \psi'_7$ | $\log \psi'_8$ |
|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 3.5 | 1.924 2793 | 2.322 2193 | 2.924 2793 | 4.145 6935 | 4.405 7219 | 4.906 3566 | 5.484 6343 |
| 2.5 | 2.008 6002 | 2.217 4839 | 3.641 4741 | 4.132 9317 | 3.401 4005 | 5.105 5511 | 5.121 5598 |
| 1.5 | 2.056 9049 | 2.021 1893 | 3.846 3371 | 3.987 2640 | 4.453 1960 | 5.046 8228 | 5.059 4119 |
| 0.5 | 2.079 1812 | 1.556 3025 | 3.925 5184 | 3.545 3071 | 4.640 2826 | 4.640 2826 | 5.457 3519 |
| $n = 23$ | | | | | | | |
| 11 | 2.363 6120 | 2.664 6420 | 4.244 4256 | 4.420 5168 | 4.872 8145 | 5.231 8364 | 5.504 8377 |
| 10 | 2.225 3093 | 2.322 2193 | 3.203 0329 | 3.981 1841 | 4.831 4218 | 5.420 8927 | 5.861 3850 |
| 9 | 2.045 3230 | 1.255 2725 | 3.876 4488 | 4.333 3667 | 4.872 8145 | 5.144 6863 | 4.463 4450 |
| 8 | 1.778 1513 | 2.079 1812 | 4.056 9049 | 4.282 2141 | 4.433 4818 | 4.889 4138 | 5.693 8940 |
| 7 | 1.176 0913 | 2.322 2193 | 4.059 1846 | 3.986 8613 | 4.403 9266 | 5.282 7580 | 5.642 5733 |
| 6 | 1.380 2112 | 2.411 6197 | 3.952 5018 | 3.179 5518 | 4.762 1832 | 5.227 6605 | 4.616 0552 |
| 5 | 1.755 8749 | 2.431 3638 | 3.699 3173 | 4.039 8898 | 4.797 1636 | 4.748 3121 | 5.530 0075 |
| 4 | 1.924 2793 | 2.401 4005 | 2.702 4305 | 4.220 9445 | 4.639 4466 | 4.873 9480 | 5.669 5354 |
| 3 | 2.021 1893 | 2.322 2193 | 3.577 4918 | 4.249 5897 | 4.022 0570 | 5.209 5150 | 5.486 7421 |
| 2 | 2.079 1812 | 2.176 0913 | 3.860 9366 | 4.164 8285 | 4.388 9178 | 5.238 1465 | 4.330 8195 |
| 1 | 2.110 5897 | 1.892 0946 | 3.978 4544 | 3.913 2839 | 4.703 3344 | 5.038 2226 | 5.515 3439 |
| 0 | 2.120 5739 | . | 4.012 6685 | . | 4.778 5853 | . | 5.653 6466 |
| $n = 24$ | | | | | | | |
| 11.5 | 2.403 1205 | 2.725 3398 | 4.327 3998 | 4.526 9722 | 5.004 0934 | 5.389 4443 | 5.690 4743 |
| 10.5 | 2.271 8416 | 2.405 0047 | 3.442 7932 | 4.010 3424 | 4.921 1192 | 5.546 2304 | 6.018 9425 |
| 9.5 | 2.103 8037 | 1.600 9729 | 3.911 0510 | 4.418 3179 | 5.000 6466 | 5.334 6286 | 5.138 6121 |
| 8.5 | 1.863 3229 | 2.069 2980 | 4.120 1789 | 4.395 6932 | 4.654 0513 | 4.849 6466 | 5.814 9837 |
| 7.5 | 1.397 9400 | 2.349 2775 | 4.141 7632 | 4.161 2781 | 4.341 3356 | 5.392 8640 | 5.837 5821 |
| 6.5 | 1.230 4489 | 2.454 3875 | 4.060 9999 | 3.072 9847 | 4.836 8998 | 5.397 8549 | 5.292 1275 |
| 5.5 | 1.724 2759 | 2.486 9969 | 3.863 7985 | 4.035 7098 | 4.919 5853 | 5.089 4070 | 5.565 2644 |
| 4.5 | 1.919 0781 | 2.471 4384 | 3.355 6431 | 4.279 8266 | 4.825 0559 | 4.701 5766 | 5.817 2440 |
| 3.5 | 2.029 3838 | 2.412 1244 | 3.356 4083 | 4.346 2943 | 4.474 2017 | 5.277 1023 | 5.745 0060 |
| 2.5 | 2.096 9100 | 2.299 9429 | 3.853 6982 | 4.306 4465 | 4.164 2041 | 5.384 7744 | 5.214 9498 |
| 1.5 | 2.136 7206 | 2.099 3353 | 4.014 1844 | 4.147 2124 | 4.724 4807 | 5.294 1906 | 5.474 5076 |
| 0.5 | 2.155 3360 | 1.632 4573 | 4.079 6153 | 3.699 4041 | 4.875 4953 | 4.875 4953 | 5.778 5853 |
| $n = 25$ | | | | | | | |
| 12 | 2.440 9091 | 2.783 3318 | 4.406 5776 | 4.628 4298 | 5.129 0322 | 5.539 2066 | 5.866 5656 |
| 11 | 2.315 9703 | 2.482 3018 | 3.628 4298 | 4.026 3698 | 5.004 0934 | 5.664 1454 | 6.167 5955 |
| 10 | 2.158 3625 | 1.819 5439 | 3.938 7998 | 4.497 1509 | 5.119 4868 | 5.506 5375 | 5.504 8377 |
| 9 | 1.939 5193 | 2.047 6642 | 4.178 1017 | 4.500 0443 | 5.840 6894 | 4.692 3886 | 5.919 8111 |
| 8 | 1.556 3025 | 2.371 4373 | 4.217 4208 | 4.311 6691 | 4.157 2754 | 5.487 6247 | 6.009 9877 |
| 7 | 0.954 2425 | 2.492 4810 | 4.158 2901 | 3.698 7963 | 4.895 4391 | 5.546 5821 | 5.650 9658 |
| 6 | 1.681 2412 | 2.537 0631 | 4.001 2836 | 3.996 1613 | 5.025 2813 | 5.339 0617 | 5.531 4355 |
| 5 | 1.908 4850 | 2.534 0261 | 3.651 8205 | 4.323 0870 | 4.979 7532 | 2.459 3925 | 5.933 6543 |
| 4 | 2.033 4238 | 2.490 8010 | 3.117 4039 | 4.426 7064 | 4.749 7054 | 5.304 9556 | 5.946 5353 |
| 3 | 2.110 5897 | 2.403 4637 | 3.819 7018 | 4.423 2786 | 3.437 2748 | 5.497 2172 | 5.668 8405 |
| 2 | 2.158 3625 | 2.252 3675 | 4.033 5203 | 4.322 2193 | 4.693 2872 | 5.484 0150 | 5.199 7552 |
| 1 | 2.184 6914 | 1.965 6720 | 4.130 0248 | 4.062 5820 | 4.937 6432 | 5.266 7020 | 5.840 7332 |
| 0 | 2.193 1246 | . | 4.158 7966 | . | 5.000 4341 | . | 5.954 6766 |

Tabl. III. Valeurs des ψ' et de leurs logarithmes pour les valeurs de n supérieures à 25.

| z | ψ'_2 | $\log \psi'_2$ | ψ'_3 | $\log \psi'_3$ | ψ'_4 | $\log \psi'_4$ |
|----------------------------|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|
| $n = 26$ | | | | | | |
| 12.5 | + 300 | 2.477 1213 | + 690.0 | 2.838 8491 | + 3 036 | 3.482 3018 |
| 11.5 | + 228 | 2.357 9348 | + 358.8 | 2.554 8524 | + 6 072 | 3.783 3318 |
| 10.5 | + 162 | 2.209 5150 | + 96.6 | 2.984 9771 | — 9 108 | 3.959 4230 |
| 9.5 | + 102 | 2.008 6002 | — 102.6 | 2.011 1474 | — 17 028 | 4.231 1636 |
| 8.5 | + 48 | 1.681 2412 | — 244.8 | 2.388 8114 | — 19 368 | 4.287 0848 |
| 7.5 | 0 | . | — 336.0 | 2.526 3393 | — 17 640 | 4.246 4986 |
| 6.5 | — 42 | 1.623 2493 | — 382.2 | 2.582 2907 | — 13 188 | 4.120 1789 |
| 5.5 | — 78 | 1.892 0946 | — 389.4 | 2.590 3959 | — 7 188 | 3.856 6081 |
| 4.5 | — 108 | 2.033 4238 | — 363.6 | 2.560 6239 | — 648 | 2.811 5750 |
| 3.5 | — 132 | 2.120 5739 | — 310.8 | 2.492 4810 | + 5 592 | 3.747 5672 |
| 2.5 | — 150 | 2.176 0913 | — 237.0 | 2.374 7483 | + 10 860 | 4.035 8298 |
| 1.5 | — 162 | 2.209 5150 | — 148.2 | 2.170 8482 | + 14 652 | 4.165 8969 |
| 0.5 | — 168 | 2.225 3093 | — 50.4 | 1.702 4305 | + 16 632 | 4.220 9445 |
| $n = 27$ | | | | | | |
| 13 | + 325 | 2.511 8834 | + 780 | 2.892 0946 | + 35 880 | 4.554 8524 |
| 12 | + 250 | 2.397 9400 | + 420 | 2.623 2493 | + 8 280 | 4.918 0303 |
| 11 | + 181 | 2.257 6786 | + 132 | 2.120 5739 | — 9 384 | 3.972 3880 |
| 10 | + 118 | 2.071 8820 | — 90 | 1.954 2425 | — 19 044 | 4.279 7582 |
| 9 | + 61 | 1.785 3298 | — 252 | 2.401 4005 | — 22 464 | 4.351 4871 |
| 8 | + 10 | 1.000 0000 | — 360 | 2.556 3025 | — 21 240 | 4.327 1545 |
| 7 | — 35 | 1.544 0680 | — 420 | 2.623 2493 | — 16 800 | 4.225 3093 |
| 6 | — 74 | 1.869 2317 | — 438 | 2.641 4741 | — 10 404 | 4.017 2003 |
| 5 | — 107 | 2.029 3838 | — 420 | 2.623 2493 | — 3 144 | 4.497 4825 |
| 4 | — 134 | 2.127 1048 | — 372 | 2.570 5429 | + 4 056 | 4.608 0979 |
| 3 | — 155 | 2.190 3317 | — 300 | 2.477 1213 | + 10 440 | 4.606 8111 |
| 2 | — 170 | 2.230 4489 | — 210 | 2.322 2193 | + 15 420 | 4.188 0844 |
| 1 | — 179 | 2.252 8530 | — 108 | 2.033 4238 | + 18 576 | 4.268 9522 |
| 0 | — 182 | 2.260 0714 | 0 | . | + 19 656 | 4.293 4951 |
| $n = 28$ | | | | | | |
| 13.5 | + 351 | 2.545 3071 | + 877.5 | 2.943 2471 | + 42 120 | 4.624 4884 |
| 12.5 | + 273 | 2.436 1626 | + 487.5 | 2.687 9746 | + 10 920 | 4.038 2226 |
| 11.5 | + 201 | 2.303 1961 | + 172.5 | 2.236 7891 | — 9 480 | 3.976 8083 |
| 10.5 | + 135 | 2.130 3338 | — 73.5 | 1.866 2873 | — 21 096 | 4.324 2001 |
| 9.5 | + 75 | 1.875 0613 | — 256.5 | 2.409 0874 | — 25 776 | 4.411 2155 |
| 8.5 | + 21 | 1.322 2193 | — 382.5 | 2.582 6314 | — 25 200 | 4.401 4005 |
| 7.5 | — 27 | 1.431 3638 | — 457.5 | 2.660 3911 | — 20 880 | 4.319 7305 |
| 6.5 | — 69 | 1.838 8491 | — 487.5 | 2.687 9746 | — 14 160 | 4.151 0633 |
| 5.5 | — 105 | 2.021 1893 | — 478.5 | 2.679 8819 | — 6 216 | 3.793 5110 |
| 4.5 | — 135 | 2.130 3338 | — 436.5 | 2.639 9842 | + 1 944 | 3.288 6963 |
| 3.5 | — 159 | 2.201 3971 | — 367.5 | 2.565 2573 | + 9 480 | 3.976 8083 |
| 2.5 | — 177 | 2.247 9733 | — 277.5 | 2.443 2630 | + 15 720 | 4.196 4525 |
| 1.5 | — 189 | 2.276 4618 | — 172.5 | 2.236 7891 | + 20 160 | 4.304 4905 |
| 0.5 | — 195 | 2.290 0346 | — 58.5 | 1.767 1559 | + 22 464 | 4.351 4871 |

| z | ψ'_2 | $\log \psi'_2$ | ψ'_3 | $\log \psi'_3$ | ψ'_4 | $\log \psi'_4$ |
|----------------------------|-----------|----------------|-----------|----------------|------------|----------------|
| $n = 29$ | | | | | | |
| 14 | + 378 | 2.577 4918 | + 982.8 | 2.992 4651 | + 49 140 | 4.691 4352 |
| 13 | + 297 | 2.472 7564 | + 561.6 | 2.749 4271 | + 14 040 | 4.147 3671 |
| 12 | + 222 | 2.346 3530 | + 218.4 | 2.339 2526 | — 9 360 | 3.971 2758 |
| 11 | + 153 | 2.184 6914 | — 52.8 | 1.722 6339 | — 23 160 | 4.364 7336 |
| 10 | + 90 | 1.954 2425 | — 258.0 | 2.411 6197 | — 29 292 | 4.466 7490 |
| 9 | + 33 | 1.518 5139 | — 403.2 | 2.605 5205 | — 29 520 | 4.470 1164 |
| 8 | — 18 | 1.255 2725 | — 494.4 | 2.694 0785 | — 25 440 | 4.405 5171 |
| 7 | — 63 | 1.799 3405 | — 537.6 | 2.730 4593 | — 18 480 | 4.266 7020 |
| 6 | — 102 | 2.008 6002 | — 538.8 | 2.731 4276 | — 9 900 | 3.954 2425 |
| 5 | — 135 | 2.130 3338 | — 504.0 | 2.702 4305 | — 792 | 2.898 7252 |
| 4 | — 162 | 2.209 5150 | — 439.2 | 2.642 6623 | + 7 920 | 3.898 7252 |
| 3 | — 183 | 2.262 4511 | — 350.4 | 2.544 5641 | + 15 480 | 4.189 7710 |
| 2 | — 198 | 2.296 6652 | — 243.6 | 2.386 6773 | + 21 300 | 4.328 3796 |
| 1 | — 207 | 2.315 9703 | — 124.8 | 2.096 2146 | + 24 960 | 4.397 2446 |
| 0 | — 210 | 2.322 2193 | 0 | . | + 26 208 | 4.418 4339 |
| $n = 30$ | | | | | | |
| 14.5 | + 406 | 2.608 5260 | + 1 096.2 | 3.039 8898 | + 57 002.4 | 4.755 8932 |
| 13.5 | + 322 | 2.507 8559 | + 642.6 | 2.807 9407 | + 17 690.4 | 4.247 7376 |
| 12.5 | + 244 | 2.387 3898 | + 270.0 | 2.431 3638 | — 8 985.6 | 3.953 5374 |
| 11.5 | + 172 | 2.235 5284 | — 27.6 | 1.400 9091 | — 25 209.6 | 4.401 5659 |
| 10.5 | + 106 | 2.025 3059 | — 256.2 | 2.408 5791 | — 32 997.6 | 4.518 4824 |
| 9.5 | + 46 | 1.662 7578 | — 421.8 | 2.625 1066 | — 34 197.6 | 4.533 9956 |
| 8.5 | — 8 | 0.903 0900 | — 530.4 | 2.724 6035 | — 30 489.6 | 4.484 1517 |
| 7.5 | — 56 | 1.748 1880 | — 588.0 | 2.769 3773 | — 23 385.6 | 4.368 9485 |
| 6.5 | — 98 | 1.991 2261 | — 600.6 | 2.778 5853 | — 14 229.6 | 4.153 1927 |
| 5.5 | — 134 | 2.127 1048 | — 574.2 | 2.759 0632 | — 4 197.6 | 3.623 0011 |
| 4.5 | — 164 | 2.214 8438 | — 514.8 | 2.711 6385 | — 5 702.4 | 3.756 9577 |
| 3.5 | — 188 | 2.274 1578 | — 428.4 | 2.631 8495 | + 14 630.4 | 4.165 2562 |
| 2.5 | — 206 | 2.313 8672 | — 321.0 | 2.506 5050 | + 21 914.4 | 4.340 7296 |
| 1.5 | — 218 | 2.338 4565 | — 198.6 | 2.297 9792 | + 27 050.4 | 4.432 1737 |
| 0.5 | — 224 | 2.350 2480 | — 67.2 | 1.827 3693 | + 29 702.4 | 4.472 7915 |
| $n = 31$ | | | | | | |
| 15 | + 435 | 2.638 4893 | + 1 218.0 | 3.085 6473 | + 65 772 | 4.818 0410 |
| 14 | + 348 | 2.541 5792 | + 730.8 | 2.863 7985 | + 21 924 | 4.340 9198 |
| 13 | + 267 | 2.426 5113 | + 327.6 | 2.515 3439 | — 8 316 | 3.919 9145 |
| 12 | + 192 | 2.283 3012 | + 2.4 | 0.380 2112 | — 27 216 | 4.434 8243 |
| 11 | + 123 | 2.089 9051 | — 250.8 | 2.399 3275 | — 36 876 | 4.566 7438 |
| 10 | + 60 | 1.778 1513 | — 438.0 | 2.641 4741 | — 39 228 | 4.593 5962 |
| 9 | + 3 | 0.477 1213 | — 565.2 | 2.752 2022 | — 36 036 | 4.556 7366 |
| 8 | — 48 | 1.681 2412 | — 638.4 | 2.805 0929 | — 28 896 | 4.460 8377 |
| 7 | — 93 | 1.968 4829 | — 663.6 | 2.821 9064 | — 19 236 | 4.284 1148 |

| z | ψ'_2 | $\log \psi'_2$ | ψ'_3 | $\log \psi'_3$ | ψ'_4 | $\log \psi'_4$ |
|----------------------------|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|
| 6 | — 132 | 2.120 5739 | — 646.8 | 2.810 7700 | — 8 316 | 3.919 9145 |
| 5 | — 165 | 2.217 4839 | — 594.0 | 2.773 7864 | + 2 772 | 3.442 7932 |
| 4 | — 192 | 2.283 3012 | — 511.2 | 2.708 5059 | + 13 104 | 4.117 4039 |
| 3 | — 213 | 2.328 3796 | — 404.4 | 2.606 8111 | + 21 924 | 4.340 9198 |
| 2 | — 228 | 2.357 9348 | — 279.6 | 2.446 5372 | + 28 644 | 4.457 0337 |
| 1 | — 237 | 2.374 7483 | — 142.8 | 2.154 7282 | + 32 844 | 4.516 4560 |
| 0 | — 240 | 2.380 2112 | 0 | . | + 34 272 | 4.534 9394 |
| $n = 32$ | | | | | | |
| 15.5 | + 465 | 2.667 4530 | + 1 348.5 | 3.129 8510 | + 75 516 | 4.878 0332 |
| 14.5 | + 375 | 2.574 0313 | + 826.5 | 2.917 2429 | + 26 796 | 4.428 0700 |
| 13.5 | + 291 | 2.463 8930 | + 391.5 | 2.592 7318 | — 7 308 | 3.863 7985 |
| 12.5 | + 213 | 2.328 3796 | + 37.5 | 1.574 0313 | — 29 148 | 4.464 6088 |
| 11.5 | + 141 | 2.149 2191 | — 241.5 | 2.382 9171 | — 40 908 | 4.611 8082 |
| 10.5 | + 75 | 1.875 0613 | — 451.5 | 2.654 6578 | — 44 604 | 4.649 3738 |
| 9.5 | + 15 | 1.176 0913 | — 598.5 | 2.777 0642 | — 42 084 | 4.624 1170 |
| 8.5 | — 39 | 1.591 0646 | — 688.5 | 2.837 9039 | — 35 028 | 4.544 4153 |
| 7.5 | — 87 | 1.939 5193 | — 727.5 | 2.861 8330 | — 24 948 | 4.397 0357 |
| 6.5 | — 129 | 2.110 5897 | — 721.5 | 2.858 2363 | — 13 188 | 4.120 1789 |
| 5.5 | — 165 | 2.217 4839 | — 676.5 | 2.830 2678 | — 924 | 2.965 6720 |
| 4.5 | — 195 | 2.290 0346 | — 598.5 | 2.777 0642 | + 10 836 | 4.034 8690 |
| 3.5 | — 219 | 2.340 4441 | — 493.5 | 2.693 2872 | + 21 252 | 4.327 3998 |
| 2.5 | — 237 | 2.374 7483 | — 367.5 | 2.565 2573 | + 29 652 | 4.472 0540 |
| 1.5 | — 249 | 2.396 1993 | — 226.5 | 2.425 6972 | + 35 532 | 4.550 6197 |
| 0.5 | — 255 | 2.406 5402 | — 76.5 | 1.883 6614 | + 38 556 | 4.585 0920 |
| $n = 33$ | | | | | | |
| 16 | + 496 | 2.695 4817 | + 1 488 | 3.172 6029 | + 86 304 | 4.936 0309 |
| 15 | + 403 | 2.605 3050 | + 930 | 2.968 4829 | + 32 364 | 4.510 0622 |
| 14 | + 316 | 2.499 6871 | + 462 | 2.664 6420 | — 5 916 | 3.772 0282 |
| 13 | + 235 | 2.371 0679 | + 78 | 1.892 0946 | — 30 972 | 4.490 9693 |
| 12 | + 160 | 2.204 1200 | — 228 | 2.357 9348 | — 45 072 | 4.653 9068 |
| 11 | + 91 | 1.959 0414 | — 462 | 2.664 6420 | — 50 316 | 4.701 7061 |
| 10 | + 28 | 1.447 1580 | — 630 | 2.799 3405 | — 48 636 | 4.686 9578 |
| 9 | — 29 | 1.462 3980 | — 738 | 2.868 0564 | — 41 796 | 4.621 1347 |
| 8 | — 80 | 1.903 0900 | — 792 | 2.898 7252 | — 31 392 | 4.496 8190 |
| 7 | — 125 | 2.096 9100 | — 798 | 2.902 0029 | — 18 852 | 4.275 3574 |
| 6 | — 164 | 2.214 8438 | — 762 | 2.881 9550 | — 5 436 | 3.735 2794 |
| 5 | — 197 | 2.294 4662 | — 690 | 2.838 8491 | + 7 764 | 3.890 0855 |
| 4 | — 224 | 2.350 2480 | — 588 | 2.769 3773 | + 19 824 | 4.297 1913 |
| 3 | — 245 | 2.389 1661 | — 462 | 2.664 6420 | + 29 988 | 4.476 9475 |
| 2 | — 260 | 2.414 9733 | — 318 | 2.502 4271 | + 37 668 | 4.575 9726 |
| 1 | — 269 | 2.429 7523 | — 162 | 2.209 5150 | + 42 444 | 4.627 8163 |
| 0 | — 272 | 2.434 5689 | 0 | . | + 44 064 | 4.644 0839 |

| z | ψ'_2 | $\log \psi'_2$ | ψ'_3 | $\log \psi'_3$ | ψ'_4 | $\log \psi'_4$ |
|----------------------------|-----------|----------------|-----------|----------------|-------------|----------------|
| $n = 34$ | | | | | | |
| 16.5 | + 528 | 2.722 6339 | + 1 636.8 | 3.213 9956 | + 98 208 | 4.992 1469 |
| 15.5 | + 432 | 2.635 4837 | + 1 041.6 | 3.017 7010 | + 38 688 | 4.587 5763 |
| 14.5 | + 342 | 2.534 0261 | + 539.4 | 2.731 9109 | — 4 092 | 3.611 9356 |
| 13.5 | + 258 | 2.411 6197 | + 124.2 | 2.094 1216 | — 32 652 | 4.513 9098 |
| 12.5 | + 180 | 2.255 2725 | — 210.0 | 2.322 2193 | — 49 344 | 4.693 2344 |
| 11.5 | + 108 | 2.033 4238 | — 469.2 | 2.671 3580 | — 56 352 | 4.750 9093 |
| 10.5 | + 42 | 1.623 2793 | — 659.4 | 2.819 1489 | — 55 692 | 4.745 7928 |
| 9.5 | — 18 | 1.255 2725 | — 786.6 | 2.895 7539 | — 49 212 | 4.692 0710 |
| 8.5 | — 72 | 1.857 3325 | — 856.8 | 2.932 8795 | — 38 592 | 4.586 4973 |
| 7.5 | — 120 | 2.079 1812 | — 876.0 | 2.942 5041 | — 25 344 | 4.403 8752 |
| 6.5 | — 162 | 2.209 5150 | — 850.2 | 2.929 5211 | — 10 812 | 4.033 9060 |
| 5.5 | — 198 | 2.296 6652 | — 785.4 | 2.895 0909 | + 3 828 | 3.582 9719 |
| 4.5 | — 228 | 2.357 9348 | — 687.6 | 2.837 3359 | + 17 568 | 4.244 7223 |
| 3.5 | — 252 | 2.401 4005 | — 562.8 | 2.750 3541 | + 29 568 | 4.470 8219 |
| 2.5 | — 270 | 2.431 3638 | — 417.0 | 2.620 1361 | + 39 156 | 4.592 7983 |
| 1.5 | — 282 | 2.450 2491 | — 256.2 | 2.408 5791 | + 45 828 | 4.661 1309 |
| 0.5 | — 288 | 2.459 3925 | — 86.4 | 1.936 5137 | + 49 248 | 4.692 3886 |
| $n = 35$ | | | | | | |
| 17 | + 561 | 2.748 9629 | + 1 795.2 | 3.254 1128 | + 111 302.4 | 5.046 5046 |
| 16 | + 462 | 2.664 6420 | + 1 161.6 | 3.065 0566 | + 45 830.4 | 4.661 1537 |
| 15 | + 369 | 2.567 0264 | + 624.0 | 2.795 1846 | — 1 785.6 | 3.251 7842 |
| 14 | + 282 | 2.450 2491 | + 176.4 | 2.246 4986 | — 34 149.6 | 4.533 3856 |
| 13 | + 201 | 2.303 1961 | — 187.2 | 2.272 3058 | — 53 697.6 | 4.729 9549 |
| 12 | + 126 | 2.100 3705 | — 472.8 | 2.674 6775 | — 62 697.6 | 4.797 2509 |
| 11 | + 57 | 1.755 8749 | — 686.4 | 2.836 5773 | — 63 249.6 | 4.801 0578 |
| 10 | — 6 | 0.788 1513 | — 834.0 | 2.921 1661 | — 57 285.6 | 4.758 0455 |
| 9 | — 63 | 1.799 3405 | — 921.6 | 2.964 5425 | — 46 569.6 | 4.668 1025 |
| 8 | — 114 | 2.056 9049 | — 955.2 | 2.980 0943 | — 32 697.6 | 4.514 5159 |
| 7 | — 159 | 2.201 3971 | — 940.8 | 2.973 4973 | — 17 097.6 | 4.232 9351 |
| 6 | — 198 | 2.296 6652 | — 884.4 | 2.946 6484 | — 1 029.6 | 3.012 6685 |
| 5 | — 231 | 2.363 6120 | — 792.0 | 2.898 7252 | + 14 414.4 | 4.158 7965 |
| 4 | — 258 | 2.411 6197 | — 669.6 | 2.825 8154 | + 28 310.4 | 4.451 9460 |
| 3 | — 279 | 2.445 6042 | — 523.2 | 2.718 6677 | + 39 902.4 | 4.600 9990 |
| 2 | — 294 | 2.468 3473 | — 358.8 | 2.554 8524 | + 48 602.4 | 4.686 6577 |
| 1 | — 303 | 2.481 4426 | — 182.4 | 2.261 0248 | + 53 990.4 | 4.732 3165 |
| 0 | — 306 | 2.485 7214 | 0 | . | + 55 814.4 | 4.746 7462 |
| $n = 36$ | | | | | | |
| 17.5 | + 595 | 2.774 5170 | + 1 963.5 | 3.293 0309 | + 125 664 | 5.099 2109 |
| 16.5 | + 493 | 2.692 8469 | + 1 290.3 | 3.298 9185 | + 53 856 | 4.731 2341 |
| 15.5 | + 397 | 2.598 7905 | + 716.1 | 2.854 9737 | + 1 056 | 3.023 6639 |
| 14.5 | + 307 | 2.487 1384 | + 234.9 | 2.370 8830 | — 35 422 | 4.549 2731 |
| 13.5 | + 223 | 2.348 3049 | — 159.3 | 2.202 2158 | — 58 104 | 4.764 2060 |

| z | ψ'_2 | $\log \psi'_2$ | ψ'_3 | $\log \psi'_3$ | ψ'_4 | $\log \psi'_4$ |
|----------------------------|-----------|----------------|-----------|----------------|-----------|----------------|
| 12.5 | + 145 | 2.161 3680 | — 472.5 | 2.674 4018 | — 69 336 | 4.840 9588 |
| 11.5 | + 73 | 1.863 3229 | — 710.7 | 2.851 6863 | — 71 304 | 4.853 1139 |
| 10.5 | + 7 | 0.845 0980 | — 879.9 | 2.944 4333 | — 66 024 | 4.819 7018 |
| 9.5 | — 53 | 1.724 2758 | — 986.1 | 2.993 9210 | — 55 344 | 4.743 0705 |
| 8.5 | — 107 | 2.029 3838 | — 1 035.3 | 3.015 0662 | — 40 944 | 4.612 1903 |
| 7.5 | — 155 | 2.190 3317 | — 1 033.5 | 3.014 3105 | — 24 336 | 4.386 2492 |
| 6.5 | — 197 | 2.294 4662 | — 986.7 | 2.994 1851 | — 6 864 | 3.836 5773 |
| 5.5 | — 233 | 2.367 3559 | — 900.9 | 2.954 6766 | + 10 296 | 4.012 6685 |
| 4.5 | — 263 | 2.419 9557 | — 782.1 | 2.893 2623 | + 26 136 | 4.417 2391 |
| 3.5 | — 287 | 2.457 8819 | — 636.3 | 2.803 6619 | + 39 816 | 4.600 0576 |
| 2.5 | — 305 | 2.484 2998 | — 469.5 | 2.671 6356 | + 50 664 | 4.704 6995 |
| 1.5 | — 317 | 2.501 0593 | — 287.7 | 2.458 9399 | + 58 176 | 4.764 7439 |
| 0.5 | — 323 | 2.509 2025 | — 96.9 | 1.986 3238 | + 62 016 | 4.792 5038 |
| $n = 37$ | | | | | | |
| 18 | + 630 | 2.799 3405 | + 2 142 | 3.330 8195 | + 141 372 | 5.149 3634 |
| 17 | + 525 | 2.720 1593 | + 1 428 | 3.154 7282 | + 62 832 | 4.798 1809 |
| 16 | + 426 | 2.629 4096 | + 816 | 2.911 6902 | + 4 448 | 3.648 1648 |
| 15 | + 333 | 2.522 4442 | + 300 | 2.477 1213 | — 36 432 | 4.561 4830 |
| 14 | + 246 | 2.390 9351 | — 126 | 2.100 3705 | — 62 532 | 4.796 1023 |
| 13 | + 165 | 2.217 4839 | — 468 | 2.670 2459 | — 76 248 | 4.882 2285 |
| 12 | + 90 | 1.954 2425 | — 732 | 2.864 5111 | — 79 848 | 4.902 2640 |
| 11 | + 21 | 1.322 2193 | — 924 | 2.965 6720 | — 75 432 | 4.877 5556 |
| 10 | — 42 | 1.623 2493 | — 1 050 | 3.021 1893 | — 64 932 | 4.812 4588 |
| 9 | — 99 | 1.995 6352 | — 1 116 | 3 047 6642 | — 50 112 | 4.699 9417 |
| 8 | — 150 | 2.176 0913 | — 1 128 | 3.052 3091 | — 32 568 | 4.512 7911 |
| 7 | — 195 | 2.290 0346 | — 1 092 | 3.038 2226 | — 13 728 | 4.137 6073 |
| 6 | — 234 | 2.369 2159 | — 1 014 | 3.006 0380 | + 5 148 | 3.711 6385 |
| 5 | — 267 | 2.426 5113 | — 204 | 2.309 6302 | + 22 968 | 4.361 1232 |
| 4 | — 294 | 2.468 3473 | — 402 | 2.604 2261 | + 38 808 | 4.588 9213 |
| 3 | — 315 | 2.498 3106 | — 588 | 2.769 3773 | + 51 912 | 4.715 2678 |
| 2 | — 330 | 2.518 5139 | — 756 | 2.878 5218 | + 61 692 | 4.790 2288 |
| 1 | — 339 | 2.530 1997 | — 900 | 2.954 2425 | + 67 728 | 4.830 7683 |
| 0 | — 342 | 2.534 0261 | 0 | . | + 69 768 | 4.843 6563 |
| $n = 38$ | | | | | | |
| 18.5 | + 666 | 2.823 4742 | + 2 331 | 3.367 5423 | + 158 508 | 5.200 0512 |
| 17.5 | + 558 | 2.746 6342 | + 1 575 | 3.197 2806 | + 72 828 | 4.862 2984 |
| 16.5 | + 456 | 2 658 9648 | + 924 | 2.965 6720 | + 8 568 | 3.932 8795 |
| 15.5 | + 360 | 2.556 3025 | + 372 | 2.570 5429 | — 37 128 | 4.569 7016 |
| 14.5 | + 270 | 2.431 3638 | — 87 | 1.939 5193 | — 66 946 | 4.825 7246 |
| 13.5 | + 186 | 2.269 5129 | — 459 | 2.661 8127 | — 83 412 | 4.921 2285 |
| 12.5 | + 108 | 2.033 4238 | — 750 | 2.875 0613 | — 88 872 | 4.948 7650 |
| 11.5 | + 36 | 1.556 3025 | — 966 | 2.984 9771 | — 85 512 | 4.932 0271 |
| 10.5 | — 30 | 1.477 1213 | — 1 113 | 3.046 4952 | — 75 348 | 4.877 0717 |
| 9.5 | — 90 | 1.954 2425 | — 1 197 | 3.078 0942 | — 60 228 | 4.779 7984 |

| z | ψ'_2 | $\log \psi'_2$ | ψ'_3 | $\log \psi'_3$ | ψ'_4 | $\log \psi'_4$ | |
|----------------------------|-----------|----------------|-------------|----------------|-----------|----------------|------------|
| 8.5 | — 144 | 2.158 3625 | — 1 224 | 3.087 7814 | — 41 832 | 4.621 5086 | |
| 7.5 | — 192 | 2.283 3012 | — 1 200 | 3.079 1812 | — 21 672 | 4.335 8990 | |
| 6.5 | — 234 | 2.369 2159 | — 1 131 | 3.053 4626 | — 1 092 | 3.038 2226 | |
| 5.5 | — 270 | 2.431 3638 | — 1 023 | 3.009 8756 | + 18 732 | 4.272 5841 | |
| 4.5 | — 300 | 2.477 1213 | — 882 | 2.945 4686 | + 36 792 | 4.565 7534 | |
| 3.5 | — 324 | 2.510 5450 | — 714 | 2.853 6982 | + 52 248 | 4.718 0692 | |
| 2.5 | — 342 | 2.534 0261 | — 525 | 2.720 1593 | + 64 428 | 4.809 0747 | |
| 1.5 | — 354 | 2.549 0033 | — 321 | 2.506 5050 | + 72 828 | 4.862 2964 | |
| 0.5 | — 360 | 2.556 3025 | — 108 | 2.033 4238 | + 77 112 | 4.887 2220 | |
| $n = 39$ | | | | | | | |
| 19 | + 703 | 2.846 9553 | + 2 503.8 | 3.398 5996 | + 177 156 | 5.248 3559 | |
| 18 | + 592 | 2.772 3217 | + 1 731.6 | 3.238 4476 | + 83 916 | 4.923 8448 | |
| 17 | + 487 | 2.687 5290 | + 1 040.4 | 3.017 2003 | + 13 356 | 4.125 6764 | |
| 16 | + 388 | 2.588 8317 | + 451.2 | 2.654 3691 | — 37 464 | 4.573 6141 | |
| 15 | + 295 | 2.469 8220 | — 42.0 | 1.623 2493 | — 71 316 | 4.853 1870 | |
| 14 | + 208 | 2.318 0633 | — 445.2 | 2.648 5552 | — 90 804 | 4.958 1050 | |
| 13 | + 127 | 2.103 8037 | — 764.4 | 2.883 3207 | — 98 364 | 4.992 8362 | |
| 12 | + 52 | 1.716 0033 | — 1 005.6 | 3.002 4253 | — 96 264 | 4.983 4639 | |
| 11 | — 17 | 1.230 4489 | — 1 174.8 | 3.069 9639 | — 86 604 | 4.937 5380 | |
| 10 | — 80 | 1.903 0900 | — 1 278.0 | 3.106 5309 | — 71 316 | 4.853 1870 | |
| 9 | — 137 | 2.136 7206 | — 1 321.2 | 3.120 9686 | — 52 164 | 4.717 3709 | |
| 8 | — 188 | 2.274 1578 | — 1 310.4 | 3.117 4039 | — 30 744 | 4.487 7604 | |
| 7 | — 233 | 2.367 3559 | — 1 251.6 | 3.097 4656 | — 8 484 | 3.928 6007 | |
| 6 | — 272 | 2.434 5689 | — 1 150.8 | 3.060 9999 | + 13 356 | 4.125 6764 | |
| 5 | — 305 | 2.484 2998 | — 1 014.0 | 3.006 0380 | + 33 684 | 4.527 4237 | |
| 4 | — 332 | 2.521 1381 | — 847.2 | 2.927 9859 | + 51 576 | 4.712 4477 | |
| 3 | — 353 | 2.547 7747 | — 656.4 | 2.817 1686 | + 66 276 | 4.821 3563 | |
| 2 | — 368 | 2.565 8478 | — 447.6 | 2.650 8901 | + 77 196 | 4.887 5948 | |
| 1 | — 377 | 2.576 3414 | — 226.8 | 2.355 6431 | + 83 916 | 4.923 8448 | |
| 0 | — 380 | 2.549 7836 | 0 | . | + 86 184 | 4.935 4266 | |
| $n = 40$ | | | | | | | |
| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 |
| 19.5 | + 741 | + 2 741.7 | + 197 402.4 | 10.5 | — 69 | — 1 358.7 | — 83 397.6 |
| 18.5 | + 627 | + 1 898.1 | + 96 170.4 | 9.5 | — 129 | — 1 419.3 | — 63 597.6 |
| 17.5 | + 519 | + 1 165.5 | + 18 914.4 | 8.5 | — 183 | — 1 422.9 | — 40 989.6 |
| 16.5 | + 417 | + 537.9 | — 37 389.6 | 7.5 | — 231 | — 1 375.5 | — 17 085.6 |
| 15.5 | + 321 | + 9.3 | — 75 597.6 | 6.5 | — 273 | — 1 283.1 | + 6 770.4 |
| 14.5 | + 231 | — 426.3 | — 98 397.6 | 5.5 | — 309 | — 1 151.7 | + 29 402.4 |
| 13.5 | + 147 | — 774.9 | — 108 309.6 | 4.5 | — 339 | — 987.3 | + 49 802.4 |
| 12.5 | + 69 | — 1 042.5 | — 107 685.6 | 3.5 | — 363 | — 795.9 | + 67 130.4 |
| 11.5 | — 3 | — 1 235.1 | — 98 709.6 | 2.5 | — 381 | — 583.5 | + 80 714.4 |
| | | | | 1.5 | — 393 | — 356.1 | + 90 050.4 |
| | | | | 0.5 | — 399 | — 119.7 | + 94 802.4 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $n = 41$ | | | | $n = 43$ | | | |
| 20 | + 780 | + 2 964.0 | + 219 336 | 21 | + 861 | + 3 444 | + 268 632 |
| 19 | + 663 | + 2 074.8 | + 109 668 | 20 | + 738 | + 2 460 | + 140 712 |
| 18 | + 552 | + 1 299.6 | + 25 308 | 19 | + 621 | + 1 596 | + 40 872 |
| 17 | + 447 | + 632.4 | - 36 852 | 18 | + 510 | + 846 | - 34 164 |
| 16 | + 348 | + 67.2 | - 79 752 | 17 | + 405 | + 204 | - 87 504 |
| 15 | + 255 | - 402.0 | - 106 164 | 16 | + 306 | - 336 | - 122 088 |
| 14 | + 168 | - 781.2 | - 118 692 | 15 | + 213 | - 780 | - 140 688 |
| 13 | + 87 | - 1 076.4 | - 119 772 | 14 | + 126 | - 1 134 | - 145 908 |
| 12 | + 12 | - 1 293.6 | - 111 672 | 13 | + 45 | - 1 404 | - 140 184 |
| 11 | - 57 | - 1 438.8 | - 96 492 | 12 | - 30 | - 1 596 | - 125 784 |
| 10 | - 120 | - 1 518.0 | - 76 164 | 11 | - 99 | - 1 716 | - 104 808 |
| 9 | - 177 | - 1 537.2 | - 52 452 | 10 | - 162 | - 1 770 | - 79 188 |
| 8 | - 228 | - 1 502.4 | - 26 952 | 9 | - 219 | - 1 764 | - 50 688 |
| 7 | - 273 | - 1 419.6 | - 1 092 | 8 | - 270 | - 1 704 | - 20 904 |
| 6 | - 312 | - 1 294.8 | + 23 868 | 7 | - 315 | - 1 596 | + 8 736 |
| 5 | - 345 | - 1 134.0 | + 46 836 | 6 | - 354 | - 1 446 | + 36 972 |
| 4 | - 372 | - 943.2 | + 66 888 | 5 | - 387 | - 1 260 | + 62 712 |
| 3 | - 393 | - 728.4 | + 83 268 | 4 | - 414 | - 1 044 | + 85 032 |
| 2 | - 408 | - 495.6 | + 95 388 | 3 | - 435 | - 804 | + 103 176 |
| 1 | - 417 | - 250.8 | + 102 828 | 2 | - 450 | - 546 | + 116 556 |
| 0 | - 420 | 0 | + 105 336 | 1 | - 459 | - 276 | + 124 752 |
| | | | | 0 | - 462 | 0 | + 127 512 |
| $n = 42$ | | | | $n = 44$ | | | |
| 20.5 | + 820 | + 3 198 | + 243 048 | 21.5 | + 903 | + 3 702.3 | + 296 184 |
| 19.5 | + 700 | + 2 262 | + 124 488 | 20.5 | + 777 | + 2 669.1 | + 158 424 |
| 18.5 | + 586 | + 1 443 | + 32 604 | 19.5 | + 657 | + 1 758.9 | + 50 184 |
| 17.5 | + 478 | + 735 | - 35 796 | 18.5 | + 543 | + 965.7 | - 31 896 |
| 16.5 | + 376 | + 132 | - 83 736 | 17.5 | + 435 | + 283.5 | - 91 008 |
| 15.5 | + 280 | - 372 | - 114 072 | 16.5 | + 333 | - 293.7 | - 130 176 |
| 14.5 | + 190 | - 783 | - 129 492 | 15.5 | + 237 | - 771.9 | - 152 256 |
| 13.5 | + 106 | - 1 107 | - 132 516 | 14.5 | + 147 | - 1 157.1 | - 159 936 |
| 12.5 | + 28 | - 1 350 | - 125 496 | 13.5 | + 63 | - 1 455.3 | - 155 736 |
| 11.5 | - 44 | - 1 518 | - 110 616 | 12.5 | - 15 | - 1 672.5 | - 142 008 |
| 10.5 | - 110 | - 1 617 | - 89 892 | 11.5 | - 87 | - 1 814.7 | - 120 936 |
| 9.5 | - 170 | - 1 653 | - 65 172 | 10.5 | - 153 | - 1 887.9 | - 94 536 |
| 8.5 | - 224 | - 1 632 | - 38 136 | 9.5 | - 213 | - 1 898.1 | - 64 656 |
| 7.5 | - 272 | - 1 560 | - 10 296 | 8.5 | - 267 | - 1 851.3 | - 32 976 |
| 6.5 | - 314 | - 1 443 | + 17 004 | 7.5 | - 315 | - 1 753.5 | - 1 008 |
| 5.5 | - 350 | - 1 287 | + 42 588 | 6.5 | - 357 | - 1 610.7 | + 29 904 |
| 4.5 | - 380 | - 1 098 | + 65 455 | 5.5 | - 393 | - 1 428.9 | + 58 584 |
| 3.5 | - 404 | - 882 | + 84 744 | 4.5 | - 423 | - 1 214.1 | + 84 031 |
| 2.5 | - 422 | - 645 | + 99 804 | 3.5 | - 447 | - 972.3 | + 105 384 |
| 1.5 | - 434 | - 393 | + 110 124 | 2.5 | - 465 | - 709.5 | + 121 992 |
| 0.5 | - 440 | - 132 | + 115 368 | 1.5 | - 477 | - 431.7 | + 133 344 |
| | | | | 0.5 | - 483 | - 144.9 | + 139 104 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 |
|----------------------------|-----------|-----------|-------------|----------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $n = 45$ | | | | | | | |
| 22 | + 946 | + 3 973.2 | + 325 802.4 | 4.5 | — 468 | — 1 335.6 | + 105 847 |
| 21 | + 817 | + 2 889.6 | + 177 710.4 | 3.5 | — 492 | — 1 066.8 | + 129 360 |
| 20 | + 694 | + 1 932.0 | + 60 614.4 | 2.5 | — 510 | — 777.0 | + 147 588 |
| 19 | + 577 | + 1 094.4 | — 28 929.6 | 1.5 | — 522 | — 472.2 | + 160 020 |
| 18 | + 466 | + 370.8 | — 94 197.6 | 0.5 | — 528 | — 158.4 | + 166 320 |
| 17 | + 361 | — 244.8 | — 138 297.6 | $n = 47$ | | | |
| 16 | + 262 | — 758.4 | — 164 169.6 | 23 | + 1 035 | + 4 554 | + 391 644 |
| 15 | + 169 | — 1 176.0 | — 174 585.6 | 22 | + 900 | + 3 366 | + 221 364 |
| 14 | + 82 | — 1 503.6 | — 172 149.6 | 21 | + 771 | + 2 310 | + 85 140 |
| 13 | + 1 | — 1 747.2 | — 159 297.6 | 20 | + 648 | + 1 380 | — 20 640 |
| 12 | — 74 | — 1 912.8 | — 138 297.6 | 19 | + 531 | + 570 | — 99 420 |
| 11 | — 143 | — 2 006.4 | — 111 249.6 | 18 | + 420 | — 126 | — 154 476 |
| 10 | — 206 | — 2 034.0 | — 80 085.6 | 17 | + 315 | — 714 | — 188 916 |
| 9 | — 263 | — 2 001.6 | — 46 569.6 | 16 | + 216 | — 1 200 | — 205 680 |
| 8 | — 314 | — 1 915.2 | — 12 297.6 | 15 | + 123 | — 1 590 | — 207 540 |
| 7 | — 359 | — 1 780.8 | + 21 302.4 | 14 | + 36 | — 1 890 | — 197 100 |
| 6 | — 398 | — 1 604.4 | + 52 970.4 | 13 | — 45 | — 2 106 | — 176 796 |
| 5 | — 431 | — 1 392.0 | + 81 614.4 | 12 | — 120 | — 2 244 | — 148 896 |
| 4 | — 458 | — 1 149.6 | + 106 310.4 | 11 | — 189 | — 2 310 | — 115 500 |
| 3 | — 479 | — 883.2 | + 126 302.4 | 10 | — 252 | — 2 310 | — 78 540 |
| 2 | — 494 | — 598.8 | + 141 002.4 | 9 | — 309 | — 2 250 | — 39 780 |
| 1 | — 503 | — 302.4 | + 149 990.4 | 8 | — 360 | — 2 136 | — 816 |
| 0 | — 506 | 0 | + 153 014.4 | 7 | — 405 | — 1 974 | + 36 924 |
| $n = 46$ | | | | 6 | — 444 | — 1 770 | + 72 180 |
| 22.5 | + 990 | + 4 257.0 | + 357 588 | 5 | — 477 | — 1 530 | + 103 860 |
| 21.5 | + 858 | + 3 121.8 | + 198 660 | 4 | — 504 | — 1 260 | + 131 040 |
| 20.5 | + 732 | + 2 115.6 | + 72 240 | 3 | — 525 | — 966 | + 152 964 |
| 19.5 | + 612 | + 1 232.4 | — 25 200 | 2 | — 540 | — 644 | + 169 044 |
| 18.5 | + 498 | + 466.2 | — 97 020 | 1 | — 549 | — 330 | + 178 860 |
| 17.5 | + 390 | — 189.0 | — 146 412 | 0 | — 552 | 0 | + 182 160 |
| 16.5 | + 288 | — 739.2 | — 176 400 | $n = 48$ | | | |
| 15.5 | + 192 | — 1 190.4 | — 189 840 | 23.5 | + 1 081 | + 4 864.5 | + 428 076 |
| 14.5 | + 102 | — 1 548.6 | — 189 420 | 22.5 | + 943 | + 3 622.5 | + 245 916 |
| 13.5 | + 18 | — 1 819.8 | — 177 660 | 21.5 | + 811 | + 2 515.5 | + 99 396 |
| 12.5 | — 60 | — 2 010.0 | — 156 912 | 20.5 | + 685 | + 1 537.5 | — 15 180 |
| 11.5 | — 132 | — 2 125.2 | — 129 360 | 19.5 | + 565 | + 682.5 | — 101 340 |
| 10.5 | — 198 | — 2 171.4 | — 97 020 | 18.5 | + 451 | — 55.5 | — 162 444 |
| 9.5 | — 258 | — 2 154.6 | — 61 740 | 17.5 | + 343 | — 682.5 | — 201 684 |
| 8.5 | — 312 | — 2 080.8 | — 25 200 | 16.5 | + 241 | — 1 204.5 | — 222 084 |
| 7.5 | — 360 | — 1 956.0 | + 11 088 | 15.5 | + 145 | — 1 627.5 | — 226 500 |
| 6.5 | — 402 | — 1 786.2 | + 45 780 | 14.5 | + 55 | — 1 957.5 | — 217 620 |
| 5.5 | — 438 | — 1 577.4 | + 77 700 | 13.5 | — 29 | — 2 200.5 | — 197 964 |
| | | | | 12.5 | — 107 | — 2 362.5 | — 169 884 |

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 |
|------|-----------|----------------------------|-----------|------|-----------|-----------|-------------|
| 11.5 | — 179 | — 2 449.5 | — 135 564 | 5 | — 525 | — 1 674.0 | + 129 780 |
| 10.5 | — 245 | — 2 467.5 | — 97 020 | 4 | — 552 | — 1 375.2 | + 159 552 |
| 9.5 | — 305 | — 2 422.5 | — 56 100 | 3 | — 573 | — 1 052.4 | + 183 492 |
| 8.5 | — 359 | — 2 320.5 | — 14 484 | 2 | — 588 | — 711.6 | + 201 012 |
| 7.5 | — 407 | — 2 167.5 | + 26 316 | 1 | — 597 | — 358.8 | + 211 692 |
| 6.5 | — 449 | — 1 969.5 | + 64 956 | 0 | — 600 | 0 | + 215 280 |
| 5.5 | — 485 | — 1 732.5 | + 100 260 | | | | |
| 4.5 | — 515 | — 1 462.5 | + 131 227 | | | | |
| 3.5 | — 539 | — 1 165.5 | + 156 996 | | | | |
| 2.5 | — 557 | — 847.5 | + 176 916 | | | | |
| 1.5 | — 569 | — 514.5 | + 190 476 | | | | |
| 0.5 | — 575 | — 172.5 | + 197 340 | | | | |
| | | $n = 49$ | | | | | |
| 24 | + 1 128 | + 5 188.8 | + 466 992 | 24.5 | + 1 176 | + 5 527.2 | + 508 502.4 |
| 23 | + 987 | + 3 891.6 | + 272 412 | 23.5 | + 1 032 | + 4 173.6 | + 300 950.4 |
| 22 | + 852 | + 2 732.4 | + 115 092 | 22.5 | + 894 | + 2 961.0 | + 132 314.4 |
| 21 | + 723 | + 1 705.2 | — 8 748 | 21.5 | + 762 | + 1 883.4 | — 1 269.6 |
| 20 | + 600 | + 804.0 | — 102 720 | 20.5 | + 636 | + 934.8 | — 103 497.6 |
| 19 | + 483 | + 122.8 | — 170 268 | 19.5 | + 516 | + 109.2 | — 177 897.6 |
| 18 | + 372 | — 644.4 | — 214 668 | 18.5 | + 402 | — 599.4 | — 227 829.6 |
| 17 | + 267 | — 1 203.6 | — 239 028 | 17.5 | + 294 | — 1 197.0 | — 256 485.6 |
| 16 | + 168 | — 1 660.8 | — 246 288 | 16.5 | + 192 | — 1 689.6 | — 266 889.6 |
| 15 | + 75 | — 2 022.0 | — 239 220 | 15.5 | + 96 | — 2 083.2 | — 261 897.6 |
| 14 | — 12 | — 2 293.2 | — 220 428 | 14.5 | + 6 | — 2 383.8 | — 244 197.6 |
| 13 | — 93 | — 2 480.4 | — 192 348 | 13.5 | — 78 | — 2 597.4 | — 216 309.6 |
| 12 | — 168 | — 2 589.6 | — 157 248 | 12.5 | — 156 | — 2 730.0 | — 180 585.6 |
| 11 | — 237 | — 2 626.8 | — 117 228 | 11.5 | — 228 | — 2 787.6 | — 139 209.6 |
| 10 | — 300 | — 2 598.0 | — 74 220 | 10.5 | — 294 | — 2 776.2 | — 94 197.6 |
| 9 | — 357 | — 2 509.2 | — 29 988 | 9.5 | — 354 | — 2 701.8 | — 47 397.6 |
| 8 | — 403 | — 2 366.4 | + 13 872 | 8.5 | — 408 | — 2 570.4 | — 489.6 |
| 7 | — 453 | — 2 175.6 | + 55 932 | 7.5 | — 456 | — 2 388.0 | + 45 014.4 |
| 6 | — 492 | — 1 942.8 | + 94 932 | 6.5 | — 498 | — 2 160.6 | + 87 770.4 |
| | | | | 5.5 | — 534 | — 1 894.2 | + 126 602.4 |
| | | | | 4.5 | — 564 | — 1 594.8 | + 160 509.4 |
| | | | | 3.5 | — 588 | — 1 268.4 | + 188 630.4 |
| | | | | 2.5 | — 606 | — 921.0 | + 210 314.5 |
| | | | | 1.5 | — 618 | — 558.6 | + 225 050.4 |
| | | | | 0.5 | — 624 | — 187.2 | + 232 592.4 |

Logarithmes des $\Sigma \psi'^2$.

Tabl. IV.

$$\psi'_s = P_s \psi_s, \Sigma \psi'^2_s = P_s^2 \Sigma \psi_s^2.$$

$$y = A_0 + A_1 z + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + A_4 \psi_4 + \dots \quad \left| \quad A_2 = P_2 B_2 = P_2 \frac{\Sigma y \psi'_2}{\Sigma \psi'^2_2}, A_3 = P_3 B_3 = P_3 \frac{\Sigma y \psi'_3}{\Sigma \psi'^2_3}, \right.$$

$$y = B_0 + B_1 z + B_2 \psi'_2 + B_3 \psi'_3 + B_4 \psi'_4 + \dots \quad \left| \quad A_4 = P_4 B_4 = P_4 \frac{\Sigma y \psi'_4}{\Sigma \psi'^2_4}, \dots \right.$$

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{n} \Sigma y, A_1 = B_1 = \frac{\Sigma y z}{\Sigma z^2}$$

| n | Σz^2 | $\log \Sigma z^2$ | $\Sigma \psi'^2_2$ | $\log \Sigma \psi'^2_2$ | $\Sigma \psi'^2_3$ | $\log \Sigma \psi'^2_3$ |
|-----|--------------|-------------------|--------------------|-------------------------|--------------------|-------------------------|
| 4 | 5.0 | 0.698 9700 043 | 36 | 1.556 3025 008 | 1.8 | 0.255 2725 051 |
| 5 | 10.0 | 1.000 0000 000 | 126 | 2.100 3705 451 | 14.4 | 1.158 3624 921 |
| 6 | 17.5 | 1.243 0380 487 | 336 | 2.526 3392 774 | 64.8 | 1.811 5750 059 |
| 7 | 28.0 | 1.447 1580 313 | 756 | 2.878 5217 955 | 216.0 | 2.334 4537 512 |
| 8 | 42.0 | 1.623 2492 904 | 1 512 | 3.179 5517 912 | 594.0 | 2.773 7864 450 |
| 9 | 60.0 | 1.778 1512 504 | 2 772 | 3.442 7932 259 | 1 425.6 | 3.153 9976 867 |
| 10 | 82.5 | 1.916 4539 485 | 4 752 | 3.676 8764 320 | 3 088.8 | 3.489 7897 886 |
| 11 | 110.0 | 2.041 3926 852 | 7 722 | 3.887 7297 973 | 6 177.6 | 3.790 8197 843 |
| 12 | 143.0 | 2.155 3360 375 | 12 012 | 4.079 6153 235 | 11 583.0 | 4.063 8210 563 |
| 13 | 182.0 | 2.260 0713 880 | 18 018 | 4.255 7065 826 | 20 592.0 | 4.313 6985 296 |
| 14 | 227.5 | 2.356 9814 010 | 26 208 | 4.418 4338 801 | 35 006.4 | 4.544 1474 509 |
| 15 | 280.0 | 2.447 1580 313 | 37 128 | 4.569 7015 554 | 57 283.2 | 4.758 0272 709 |
| 16 | 340.0 | 2.531 4789 170 | 51 408 | 4.711 0307 082 | 90 698.4 | 4.957 5996 258 |
| 17 | 408.0 | 2.610 6601 631 | 69 768 | 4.843 6562 735 | 139 536.0 | 5.144 6862 691 |
| 18 | 484.5 | 2.685 2937 814 | 93 024 | 4.968 5950 101 | 209 304.0 | 5.320 7775 282 |
| 19 | 570.0 | 2.755 8748 557 | 122 094 | 5.086 6943 222 | 306 979.2 | 5.487 1089 500 |
| 20 | 665.0 | 2.822 8216 453 | 158 004 | 5.198 6680 816 | 441 282.6 | 5.644 7168 033 |
| 21 | 770.0 | 2.886 4907 252 | 201 894 | 5.305 1234 125 | 622 987.2 | 5.794 4791 237 |
| 22 | 885.5 | 2.947 1885 655 | 255 024 | 5.406 5810 533 | 865 260.0 | 5.937 1466 272 |
| 23 | 1 012.0 | 3.005 1805 125 | 318 780 | 5.503 4910 663 | 1 184 040 0 | 6.073 3663 742 |
| 24 | 1 150.0 | 3.060 6978 404 | 394 680 | 5.596 2451 195 | 1 598 454.0 | 6.203 7001 427 |
| 25 | 1 300.0 | 3.113 9433 523 | 484 380 | 5.685 1862 029 | 2 131 272.0 | 6.328 6388 794 |
| 26 | 1 462.5 | 3.165 0958 748 | 589 680 | 5.770 6163 982 | 2 809 404.0 | 6.448 6141 964 |
| 27 | 1 638.0 | 3.214 3138 974 | 712 530 | 5.852 8031 544 | 3 664 440.0 | 6.564 0076 151 |
| 28 | 1 827.0 | 3.261 8573 856 | 855 036 | 5.931 9844 004 | 4 733 235.0 | 6.675 1580 673 |
| 29 | 2 030.0 | 3.307 4960 379 | 1 019 466 | 6.008 3727 463 | 6 058 540.8 | 6.782 3680 369 |
| 30 | 2 247.5 | 3.351 6997 004 | 1 208 256 | 6.082 1589 605 | 7 689 686.4 | 6.885 9086 288 |
| 31 | 2 480.0 | 3.394 4516 808 | 1 424 016 | 6.153 5148 690 | 9 683 308.8 | 6.986 0237 817 |
| 32 | 2 728.0 | 3.435 8443 660 | 1 669 536 | 6.222 5957 881 | 12 104 136.0 | 7.082 9337 947 |
| 33 | 2 992.0 | 3.475 9615 892 | 1 947 792 | 6.289 5425 778 | 15 025 824.0 | 7.176 8382 976 |
| 34 | 3 272.5 | 3.514 8796 552 | 2 261 952 | 6.354 4833 847 | 18 531 849.6 | 7.267 9187 669 |
| 35 | 3 570.0 | 3.552 6682 161 | 2 615 382 | 6.417 5351 304 | 22 716 460.8 | 7.356 3406 697 |
| 36 | 3 885.0 | 3.589 3910 231 | 3 011 652 | 6.478 8047 872 | 27 685 686.6 | 7.442 2552 984 |
| 37 | 4 218.0 | 3.625 1065 754 | 3 454 542 | 6.538 3904 772 | 33 558 408.0 | 7.525 8013 499 |
| 38 | 5 569.5 | 3.659 8686 817 | 3 948 048 | 6.596 3824 241 | 40 467 492.0 | 7.607 1062 895 |
| 39 | 4 940.0 | 3.693 7269 489 | 4 496 388 | 6 652 8637 801 | 48 560 990.4 | 7.686 2875 356 |
| 40 | 5 330.0 | 3.726 7272 090 | 5 104 008 | 6 707 9113 464 | 58 003 405.2 | 7.763 4534 904 |

| n | Σz^2 | $\log \Sigma z^2$ | $\Sigma \psi_2^2$ | $\log \Sigma \psi_2^2$ | $\Sigma \psi_3^2$ | $\log \Sigma \psi_3^2$ |
|-----|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 41 | 5 740.0 | 3.758 9118 924 | 5 775 588 | 6.761 5962 054 | 68 977 022.4 | 7.838 7044 428 |
| 42 | 6 170.5 | 3.790 3203 566 | 6 516 048 | 6.813 9842 748 | 81 683 316.0 | 7.912 1333 600 |
| 43 | 6 622.0 | 3.820 9891 764 | 7 330 554 | 6.865 1367 973 | 96 344 424.0 | 7.983 8265 846 |
| 44 | 7 095.0 | 3.850 9523 998 | 8 224 524 | 6.915 1107 723 | 113 204 698.2 | 8.053 8644 512 |
| 45 | 7 590.0 | 3.880 2417 759 | 9 203 634 | 6.963 9593 398 | 132 532 329.6 | 8.122 3218 319 |
| 46 | 8 107.5 | 3.908 8869 573 | 10 273 824 | 7.011 7321 216 | 154 621 051.2 | 8.189 2686 215 |
| 47 | 8 648.0 | 3.936 9156 809 | 11 441 304 | 7.058 4755 251 | 179 791 920.0 | 8.254 7701 703 |
| 48 | 9 212.0 | 3.964 3539 293 | 12 712 560 | 7.104 2330 157 | 208 395 180.0 | 8.318 8876 699 |
| 49 | 9 800.0 | 3.991 2260 757 | 14 094 360 | 7.149 0453 601 | 240 812 208.0 | 8.381 6784 997 |
| 50 | 10 412.5 | 4.017 5550 144 | 15 593 760 | 7.192 9508 458 | 277 457 544.0 | 8.443 1965 377 |
| n | $\log \Sigma \psi_4^2$ | $\log \Sigma \psi_5^2$ | $\log \Sigma \psi_6^2$ | $\log \Sigma \psi_7^2$ | $\log \Sigma \psi_8^2$ | |
| 5 | 2.605 5205 234 | . | . | . | . | |
| 6 | 3.605 5205 234 | 2.401 4005 408 | . | . | . | |
| 7 | 4.345 8832 129 | 3.480 5817 868 | 2.965 6719 712 | . | . | |
| 8 | 4.947 9432 043 | 4.293 4951 435 | 4.111 8000 069 | 3.535 5472 792 | . | |
| 9 | 5.459 8265 652 | 4.962 5019 244 | 4.986 8612 703 | 4.739 6672 618 | 4.109 5785 669 | |
| 10 | 5.906 9845 966 | 5.536 5331 922 | 5.713 8599 982 | 5.669 0861 875 | 5.364 8510 520 | |
| 11 | 6.304 9246 053 | 6.041 6831 705 | 6.342 2489 283 | 6.447 2374 379 | 6.342 5746 573 | |
| 12 | 6.663 9465 479 | 6.493 9808 415 | 6.898 5514 290 | 7.123 9310 476 | 7.166 4833 982 | |
| 13 | 6.991 3054 823 | 6.904 1553 066 | 7.399 1537 796 | 7.725 9910 389 | 7.886 6427 016 | |
| 14 | 7.292 3354 779 | 7.279 8189 205 | 7.855 0857 353 | 8.270 0590 832 | 8.530 0953 781 | |
| 15 | 7.571 0890 789 | 7.626 6064 067 | 8.274 2150 430 | 8.767 3837 240 | 9.113 6719 638 | |
| 16 | 7.830 7263 894 | 7.948 8257 015 | 8.662 3952 144 | 9 226 0215 731 | 9 648 7851 655 | |
| 17 | 8.073 7644 381 | 8 249 8556 971 | 9.024 1230 504 | 9.651 9903 053 | 10 143 6351 871 | |
| 18 | 8.302 2437 666 | 8.532 4022 871 | 9.362 9416 070 | 10.049 9303 140 | 10 604 3660 257 | |
| 19 | 8.517 8435 669 | 8.798 6701 765 | 9.681 7003 696 | 10.423 5109 768 | 11.035 7297 898 | |
| 20 | 8.721 9635 496 | 9.050 4821 495 | 9.982 7303 652 | 10.775 6934 949 | 11.441 4951 360 | |
| 21 | 8.915 7835 756 | 9.289 3642 384 | 10.267 9660 937 | 11.108 9081 740 | 11.824 7118 879 | |
| 22 | 9.100 3080 022 | 9.516 6080 199 | 10.539 0328 660 | 11.425 1781 362 | 12.187 8897 903 | |
| 23 | 9.276 3992 613 | 9.733 3171 299 | 10.797 3108 813 | 11.762 2081 319 | 12.533 1234 484 | |
| 24 | 9.444 8036 917 | 9.940 4426 227 | 11.043 9832 146 | 12.013 4498 430 | 12.862 1821 677 | |
| 25 | 9.606 1716 939 | 10.138 8102 765 | 11.280 0724 033 | 12.288 1509 000 | 13.176 5761 249 | |
| n | $\log \Sigma \psi_4^2$ | n | $\log \Sigma \psi_4^2$ | n | $\log \Sigma \psi_4^2$ | |
| 26 | 9.761 0736 539 | 35 | 10.931 6824 925 | 44 | 11.830 0812 018 | |
| 27 | 9.910 0126 669 | 36 | 11.042 3807 900 | 45 | 11.918 2172 905 | |
| 28 | 10.053 4348 092 | 37 | 11.150 0146 684 | 46 | 12.004 4034 382 | |
| 29 | 10.191 7375 074 | 38 | 11.254 7500 189 | 47 | 12.088 7243 239 | |
| 30 | 10.325 2764 157 | 39 | 11.356 7395 574 | 48 | 12.171 2592 119 | |
| 31 | 10.454 3711 121 | 40 | 11.456 1241 895 | 49 | 12.252 0824 050 | |
| 32 | 10.579 3098 487 | 41 | 11.553 0342 026 | 50 | 12.331 2636 511 | |
| 33 | 10.700 3535 414 | 42 | 11.647 5903 102 | | | |
| 34 | 10.817 7391 402 | 43 | 11.739 9045 715 | | | |

Tabl. V.

Logarithmes des coefficients des ψ .

$$\psi_s = z^s - (s, s-2) z^{s-2} + (s, s-4) z^{s-4} - (s, s-6) z^{s-6} + \dots$$

$$y = A_0 + A_1 z + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + A_4 \psi_4 + \dots$$

$$y = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + M_3 z^3 + M_4 z^4 + \dots$$

$$M_0 = A_0 - (2.0) A_2 + (4.0) A_4 - (6.0) A_6 + \dots$$

$$M_1 = A_1 - (3.1) A_3 + (5.1) A_5 - (7.1) A_7 + \dots$$

$$M_2 = A_2 - (4.2) A_4 + (6.2) A_6 - (8.2) A_8 + \dots$$

$$M_3 = A_3 - (5.3) A_5 + (7.3) A_7 - \dots$$

$$M_4 = A_4 - (6.4) A_6 + (8.4) A_8 - \dots$$

$$M_5 = A_5 - (7.5) A_7 + \dots$$

$$M_6 = A_6 - (8.6) A_8 + \dots$$

.....

| n | $\psi_2 = z^2 - \frac{n^2 - 1}{12}$ | | $\psi_3 = z^3 - \frac{3n^2 - 7}{20} z$ | | $\psi_4 = z^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} z^2 + \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$ | |
|----|-------------------------------------|--|--|---|--|--|
| | $n^2 - 1$ | $\log \frac{n^2 - 1}{12} = \log (2.0)$ | $\frac{3n^2 - 7}{20}$ | $\log \frac{3n^2 - 7}{20} = \log (3.1)$ | $3n^2 - 13$ | $\log \frac{3n^2 - 13}{14} = \log (4.2)$ |
| 4 | 15 | 0.096 9100 130 | 2.05 | 0.311 7538 611 | . | . |
| 5 | 24 | 0.301 0299 957 | 3.40 | 0.531 4789 170 | 62 | 0.646 2635 538 |
| 6 | 35 | 0.464 8867 983 | 5.05 | 0.703 2913 781 | 95 | 0.831 5955 696 |
| 7 | 48 | 0.602 0599 913 | 7.00 | 0.845 0980 400 | 134 | 0.980 9767 627 |
| 8 | 63 | 0.720 1593 034 | 9.25 | 0.966 1417 327 | 179 | 1.106 7249 953 |
| 9 | 80 | 0.823 9087 409 | 11.80 | 1.071 8820 073 | 230 | 1.215 5998 003 |
| 10 | 99 | 0.916 4539 486 | 14.65 | 1.165 8376 247 | 287 | 1.311 7538 610 |
| 11 | 120 | 1.000 0000 000 | 17.80 | 1.250 4200 023 | 350 | 1.397 9400 087 |
| 12 | 143 | 1.076 1547 914 | 21.25 | 1.327 3589 344 | 419 | 1.476 0859 873 |
| 13 | 168 | 1.146 1280 357 | 25.00 | 1.397 9400 087 | 494 | 1.547 5989 132 |
| 14 | 195 | 1.210 8533 653 | 29.05 | 1.463 1461 367 | 575 | 1.613 5398 090 |
| 15 | 224 | 1.271 0667 723 | 33.40 | 1.523 7464 668 | 662 | 1.674 7299 537 |
| 16 | 255 | 1.327 3589 344 | 38.05 | 1.580 3546 611 | 755 | 1.731 8189 159 |
| 17 | 288 | 1.380 2112 417 | 43.00 | 1.633 4684 556 | 854 | 1.785 3298 350 |
| 18 | 223 | 1.430 0212 763 | 48.25 | 1.683 4973 177 | 959 | 1.835 6905 715 |
| 19 | 360 | 1.477 1212 547 | 53.80 | 1.730 7822 757 | 1 070 | 1.883 2557 420 |
| 20 | 399 | 1.521 7916 496 | 59.65 | 1.775 6104 480 | 1 187 | 1.928 3226 833 |
| 21 | 440 | 1.564 2714 304 | 65.80 | 1.818 2258 936 | 1 310 | 1.971 1432 600 |
| 22 | 483 | 1.604 7658 847 | 72.25 | 1.858 8378 514 | 1 439 | 2.011 9327 582 |
| 23 | 528 | 1.643 4526 765 | 79.00 | 1.897 6270 913 | 1 574 | 2.050 8766 923 |
| 24 | 575 | 1.680 4865 986 | 86.05 | 1.934 7508 747 | 1 715 | 2.088 1360 887 |
| 25 | 624 | 1.716 0033 436 | 93.40 | 1.970 3468 762 | 1 862 | 2.123 8516 409 |
| 26 | 675 | 1.750 1225 268 | 101.05 | 2.004 5363 179 | 2 015 | 2.158 1470 148 |
| 27 | 728 | 1.782 9501 333 | 109.00 | 2.037 4264 979 | 2 174 | 2.191 1315 041 |
| 28 | 783 | 1.814 5805 160 | 117.25 | 2.069 1128 514 | 2 339 | 2.222 9021 861 |
| 29 | 840 | 1.845 0980 400 | 125.80 | 2.099 6806 411 | 2 510 | 2.253 5456 858 |
| 30 | 899 | 1.874 5784 457 | 134.65 | 2.129 2063 577 | 2 687 | 2.283 1396 307 |

| n | $\psi_2 = z^2 - \frac{n^2 - 1}{12}$ | | $\psi_3 = z^3 - \frac{3n^2 - 7}{20} z$ | | $\psi_4 = z^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} z^2 + \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$ | | | |
|--|---|---------------------------------------|--|---|--|---|---|--|
| | $n^2 - 1$ | $\log \frac{n^2 - 1}{12} = \log(2.0)$ | $\frac{3n^2 - 7}{20}$ | $\log \frac{3n^2 - 7}{20} = \log(3.1)$ | $3n^2 - 13$ | $\log \frac{3n^2 - 13}{14} = \log(4.2)$ | | |
| 31 | 960 | 1.903 0899 870 | 143.80 | 2.157 7588 860 | 2 870 | 2.311 7538 610 | | |
| 32 | 1 023 | 1.930 6943 877 | 153.25 | 2.185 4004 832 | 3 059 | 2.339 4514 413 | | |
| 33 | 1 088 | 1.957 4476 493 | 163.00 | 2.212 1876 044 | 3 254 | 2.366 2895 129 | | |
| 34 | 1 155 | 1.983 4007 382 | 173.05 | 2.238 1716 036 | 3 445 | 2.392 3200 160 | | |
| 35 | 1 224 | 2.008 6001 718 | 183.40 | 2.263 3993 313 | 3 662 | 2.417 5903 043 | | |
| 36 | 1 295 | 2.033 0885 224 | 194.05 | 2.287 9136 471 | 3 875 | 2.442 1436 711 | | |
| 37 | 1 368 | 2.056 9048 513 | 205.00 | 2.311 7538 611 | 4 094 | 2.466 0198 026 | | |
| 38 | 1 443 | 2.080 0850 850 | 216.25 | 2.334 9561 161 | 4 319 | 2.489 2551 683 | | |
| 39 | 1 520 | 2.102 6623 419 | 227.80 | 2.357 5537 197 | 4 550 | 2.511 8833 610 | | |
| 40 | 1 599 | 2.124 6672 177 | 239.65 | 2.379 5774 333 | 4 787 | 2.533 9353 918 | | |
| 41 | 1 680 | 2.146 1280 357 | 251.80 | 2.401 0557 258 | 5 030 | 2.555 4399 494 | | |
| 42 | 1 763 | 2.167 0710 663 | 264.25 | 2.422 0149 960 | 5 279 | 2.576 4236 263 | | |
| 43 | 1 848 | 2.187 5207 208 | 277.00 | 2.442 4797 691 | 5 534 | 2.596 9111 191 | | |
| 44 | 1 935 | 2.207 4997 233 | 290.05 | 2.462 4728 698 | 5 795 | 2.616 9254 046 | | |
| 45 | 2 024 | 2.227 0292 621 | 303.40 | 2.482 0155 765 | 6 062 | 2.636 4878 963 | | |
| 46 | 2 115 | 2.246 1291 258 | 317.05 | 2.501 1277 575 | 6 335 | 2.655 6185 835 | | |
| 47 | 2 208 | 2.264 8178 230 | 331.00 | 2.519 8279 938 | 6 614 | 2.674 3361 549 | | |
| 48 | 2 303 | 2.283 1126 919 | 345.25 | 2.538 1336 873 | 6 899 | 2.692 6581 093 | | |
| 49 | 2 400 | 2.301 0299 957 | 359.80 | 2.556 0611 590 | 7 190 | 2.710 6008 547 | | |
| 50 | 2 499 | 2.318 5850 101 | 374.65 | 2.573 6257 369 | 7 487 | 2.728 1797 974 | | |
| $\psi_4 = z^4 - \frac{3n^2 - 13}{14} z^2 + \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$ | | | | | | | | |
| n | $\log_3 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$ | | n | $\log_3 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$ | | n | $\log_3 \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 9)}{560}$ | |
| 5 | 0.313 2644 521 | | 21 | 3.007 8696 510 | | 37 | 3.998 5582 335 | |
| 6 | 0.704 3650 362 | | 22 | 3.089 5739 681 | | 38 | 4.045 0514 599 | |
| 7 | 1.012 2344 564 | | 23 | 3.167 5704 939 | | 39 | 4.090 3286 068 | |
| 8 | 1.268 6364 667 | | 24 | 3.242 1841 313 | | 40 | 4.134 4518 711 | |
| 9 | 1.489 3557 111 | | 25 | 3.313 6985 296 | | 41 | 4.177 4787 825 | |
| 10 | 1.683 6098 146 | | 26 | 3.382 3628 345 | | 42 | 4.229 4626 608 | |
| 11 | 1.857 3324 964 | | 27 | 3.448 3971 035 | | 43 | 4.260 4530 176 | |
| 12 | 2.014 6030 337 | | 28 | 3.511 9966 923 | | 44 | 4.300 4959 117 | |
| 13 | 2.158 3624 921 | | 29 | 3.573 3358 401 | | 45 | 4.339 6342 637 | |
| 14 | 2.290 8094 456 | | 30 | 3.632 5706 235 | | 46 | 4.377 9081 350 | |
| 15 | 2.413 6349 972 | | 31 | 3.689 8414 091 | | 47 | 4.415 3549 776 | |
| 16 | 2.528 1703 614 | | 32 | 3.745 2749 037 | | 48 | 4.452 0098 556 | |
| 17 | 2.635 4837 468 | | 33 | 3.798 9858 786 | | 49 | 4.487 9056 447 | |
| 18 | 2.736 4463 038 | | 34 | 3.851 0786 298 | | 50 | 4.523 0732 114 | |
| 19 | 2.831 7783 920 | | 35 | 3.901 6482 205 | | | | |
| 20 | 2.922 0828 808 | | 36 | 3.950 7815 430 | | | | |

| <i>n</i> | $\psi_5 = z^5 - (5.3) z^3 + (5.1) z$ | | $\psi_6 = z^6 - (6.4) z^4 + (6.2) z^2 - (6.0)$ | | |
|----------|--|----------------|--|--|----------------|
| | log (5.3) | log (5.1) | log (6.4) | log (6.2) | log (6.0) |
| 6 | 0.906 0954 971 | 1.059 7602 035 | . | . | . |
| 7 | 1.066 9467 896 | 1.397 1119 922 | 1.119 9753 171 | 1.596 0970 444 | 1.192 6905 209 |
| 8 | 1.199 5723 549 | 1.669 8092 623 | 1.262 3432 039 | 1.893 3897 321 | 1.659 9458 964 |
| 9 | 1.312 9292 190 | 1.900 6705 129 | 1.381 8531 888 | 2.138 7331 900 | 2.037 7885 609 |
| 10 | 1.412 1804 478 | 2.101 7327 576 | 1.485 2696 079 | 2.349 2002 361 | 2.358 9159 008 |
| 11 | 1.500 6023 506 | 2.280 2747 741 | 1.576 6554 116 | 2.534 2569 296 | 2.639 8485 522 |
| 12 | 1.580 4180 664 | 2.441 0948 064 | 1.658 6617 005 | 2.699 8032 473 | 2.890 3948 178 |
| 13 | 1.653 2125 138 | 2.587 5506 200 | 1.733 1242 806 | 2.849 8101 421 | 3.116 9698 069 |
| 14 | 1.720 1593 034 | 2.722 0974 797 | 1.801 3725 230 | 2.987 0997 734 | 3.324 0503 788 |
| 15 | 1.782 1539 928 | 2.846 5923 543 | 1.864 4031 952 | 3.113 7610 926 | 3.514 9098 156 |
| 16 | 1.839 8968 463 | 2.962 4778 563 | 1.922 9848 157 | 3.231 3899 370 | 3.692 0271 640 |
| 17 | 1.893 9466 076 | 3.070 8994 402 | 1.977 7236 053 | 3.341 2366 232 | 3.857 3324 964 |
| 18 | 1.944 7567 615 | 3.172 7832 823 | 2.029 1069 513 | 3.444 3012 422 | 4.012 3623 149 |
| 19 | 1.992 7007 613 | 3.268 8898 530 | 2.077 5330 677 | 3.541 3976 827 | 4.158 3624 921 |
| 20 | 2.038 0900 496 | 3.359 8518 505 | 2.123 3318 390 | 3.633 1980 851 | 4.296 3589 723 |
| 21 | 2.081 1872 287 | 3.446 2017 283 | 2.166 7798 415 | 3.720 2645 742 | 4.427 2078 044 |
| 22 | 2.122 2158 783 | 3.528 3921 005 | 2.208 1114 058 | 3.803 0724 526 | 4.551 6314 764 |
| 23 | 2.161 3680 022 | 3.606 8111 469 | 2.247 5269 205 | 3.882 0275 031 | 4.670 2458 531 |
| 24 | 2.198 8097 656 | 3.681 7944 344 | 2.285 1991 702 | 3.957 4791 280 | 4.783 5805 529 |
| 25 | 2.234 6859 743 | 3.753 6341 193 | 2.321 2782 446 | 4.029 7304 845 | 4.892 0946 027 |
| <i>n</i> | $\psi_7 = z^7 - (7.5) z^5 + (7.3) z^3 - (7.1) z$ | | | $\psi_8 = z^8 - (8.6) z^6 + (8.4) z^4 - (8.2) z^2 + (8.0)$ | |
| | log (7.5) | log (7.3) | log (7.1) | log (8.6) | log (8.4) |
| 8 | 1.302 2809 648 | 2.025 8588 389 | 2.107 5253 467 | . | . |
| 9 | 1.430 1246 920 | 2.291 9305 530 | 2.524 2735 342 | 1.461 3984 705 | 2.387 8915 582 |
| 10 | 1.539 0278 197 | 2.515 2327 484 | 2.867 8412 245 | 1.577 4917 998 | 2.628 8504 910 |
| 11 | 1.634 2446 747 | 2.708 9198 503 | 3.163 2698 266 | 1.677 6069 527 | 2.833 9313 026 |
| 12 | 1.719 0442 977 | 2.880 6029 975 | 3.423 8654 968 | 1.765 9167 940 | 3.013 5029 675 |
| 13 | 1.795 6126 769 | 3.035 1553 396 | 3.657 7563 452 | 1.845 0980 400 | 3.173 7912 135 |
| 14 | 1.865 4911 987 | 3.175 9187 471 | 3.870 3589 756 | 1.916 9800 473 | 3.318 8796 801 |
| 15 | 1.929 8117 747 | 3.505 3017 518 | 4.065 5050 230 | 1.982 8740 013 | 3.451 6172 020 |
| 16 | 1.989 4327 030 | 3.425 1068 575 | 4.246 0256 041 | 2.043 7551 270 | 3.574 0836 025 |
| 17 | 2.045 0219 081 | 3.536 7235 053 | 4.414 0832 892 | 2.100 3705 451 | 3.687 8512 526 |
| 18 | 2.097 1104 104 | 3.641 2485 720 | 4.571 3739 162 | 2.153 3066 203 | 3.794 1422 627 |
| 19 | 2.146 1280 357 | 3.739 5651 529 | 4.719 2559 344 | 2.203 0328 870 | 3.893 9281 266 |
| 20 | 2.192 4280 553 | 3.832 3960 424 | 4.858 8368 865 | 2.249 9317 566 | 3.987 9956 586 |
| 21 | 2.236 3046 660 | 3.920 3411 927 | 4.991 0332 748 | 2.294 3192 319 | 4.076 9922 022 |
| 22 | 2.278 0056 895 | 4.003 9046 543 | 5.116 6132 174 | 2.336 4597 338 | 4.161 4575 591 |
| 23 | 2.312 0796 634 | 4.083 5143 969 | 5.236 2275 152 | 2.376 5769 571 | 4.241 8471 185 |
| 24 | 2.355 6946 016 | 4.159 5371 821 | 5.350 4333 091 | 2.414 8619 761 | 4.318 5489 811 |
| 25 | 2.392 0201 657 | 4.232 2899 168 | 5.459 7108 790 | 2.451 4794 051 | 4.391 8968 767 |

| | | |
|-----|---|----------------|
| n | $\psi_8 = z^8 - (8.6)z^6 + (8.4)z^4 - (8.2)z^2 + (8.0)$ | |
| | log (8.2) | log (8.0) |
| 9 | 2.786 1051 601 | 2.341 0400 165 |
| 10 | 3.162 4349 638 | 2.864 5875 542 |
| 11 | 3.477 7112 513 | 3.295 2825 260 |
| 12 | 3.751 5476 436 | 3.666 2099 004 |
| 13 | 3.994 8368 588 | 3.994 2525 303 |
| 14 | 4.214 4087 500 | 4.289 4691 908 |
| 15 | 4.414 8948 587 | 4.558 5239 608 |
| 16 | 4.599 6134 258 | 4.806 0989 868 |
| 17 | 4.771 0399 576 | 5.035 6452 155 |
| 18 | 4.931 0808 566 | 5.249 7964 861 |
| 19 | 5.081 2407 017 | 5.450 6185 635 |
| 20 | 5.222 7316 339 | 5.639 7675 651 |
| 21 | 5.356 5468 140 | 5.818 5953 487 |
| 22 | 5.483 5117 132 | 5.992 1974 740 |
| 23 | 5.604 3208 106 | 6.149 5885 678 |
| 24 | 5.719 5650 578 | 6.303 4926 454 |
| 25 | 5.829 7512 293 | 6.450 6185 635 |

Usages des tables.

La table I contient les valeurs des ψ' , depuis $n=4$ jusqu'à $n=25$. La table II donne les logarithmes de ces valeurs, depuis $n=10$ jusqu'à $n=25$. Ces logarithmes sont à 7 décimales. Si on veut un plus grand nombre de chiffres, il convient d'employer directement les valeurs des ψ' , plutôt que leurs logarithmes. La table III donne les valeurs de ψ'_2, ψ'_3, ψ_4 depuis $n=26$ jusqu'à $n=50$, et les logarithmes de ces valeurs, depuis $n=26$ jusqu'à $n=39$. La table IV contient les logarithmes des $\Sigma \psi'^2$. Ces logarithmes ont été calculés avec 12 décimales, au moyen des tables de Steinhäuser. Ils sont donnés avec 10 décimales. La table V donne les logarithmes avec 10 décimales des coefficients des développements des ψ . Ces logarithmes ont été calculés au moyen des tables de Vega. La dernière décimale est donc incertaine, quand il s'agit des nombres qui dépassent l'étendue des tables de Vega.

La table I ne contient que les valeurs des ψ' qui correspondent aux valeurs positives de z . Les ψ' d'indice pair ont les mêmes valeurs pour z négatif, et les ψ d'indices impair, des valeurs de signes contraires.

Par exemple, pour $n=7$, les valeurs complètes des ψ' sont :

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| + 3 | + 15 | + 6 | + 36 | + 6 | + 1 |
| + 2 | 0 | - 6 | - 84 | - 24 | - 6 |
| + 1 | - 9 | - 6 | + 12 | + 30 | + 15 |
| 0 | - 12 | 0 | + 72 | 0 | - 20 |
| - 1 | - 9 | + 6 | + 12 | - 30 | + 15 |
| - 2 | 0 | + 6 | - 84 | + 24 | - 6 |
| - 3 | + 15 | - 6 | + 36 | - 6 | + 1 |

Pour $n=8$, les valeurs complètes des ψ' sont :

| z | ψ'_2 | ψ'_3 | ψ'_4 | ψ'_5 | ψ'_6 | ψ'_7 |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| + 3.5 | + 21 | + 10.5 | + 84 | + 21 | + 7 | + 1 |
| + 2.5 | + 3 | - 7.5 | - 156 | - 69 | - 35 | - 7 |
| + 1.5 | - 9 | - 10.5 | - 36 | + 51 | + 63 | + 21 |
| + 0.5 | - 15 | - 4.5 | + 108 | + 45 | - 35 | - 35 |
| - 0.5 | - 15 | + 4.5 | + 108 | - 45 | - 35 | + 35 |
| - 1.5 | - 9 | + 10.5 | - 36 | - 51 | + 63 | - 21 |
| - 2.5 | + 3 | + 7.5 | - 156 | + 69 | - 35 | + 7 |
| - 3.5 | + 21 | - 10.5 | + 84 | - 21 | + 7 | - 1 |

Nous allons par un exemple faire voir l'usage des tables.

Le *Registrar-General* donne pour les nombres des mariages en Angleterre et Galles, les nombres suivants :

| Année | Nombre de mariages |
|----------------|--------------------|
| 1846 | 145 664 |
| 1847 | 135 845 |
| 1848 | 138 230 |
| 1849 | 141 883 |
| 1850 | 152 744 |

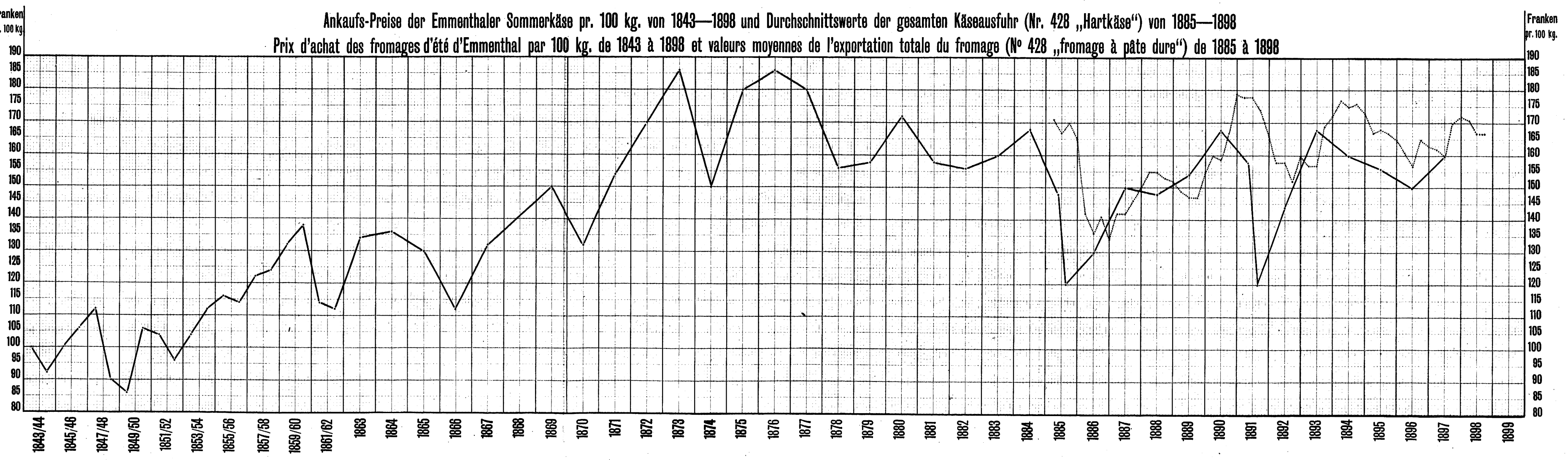
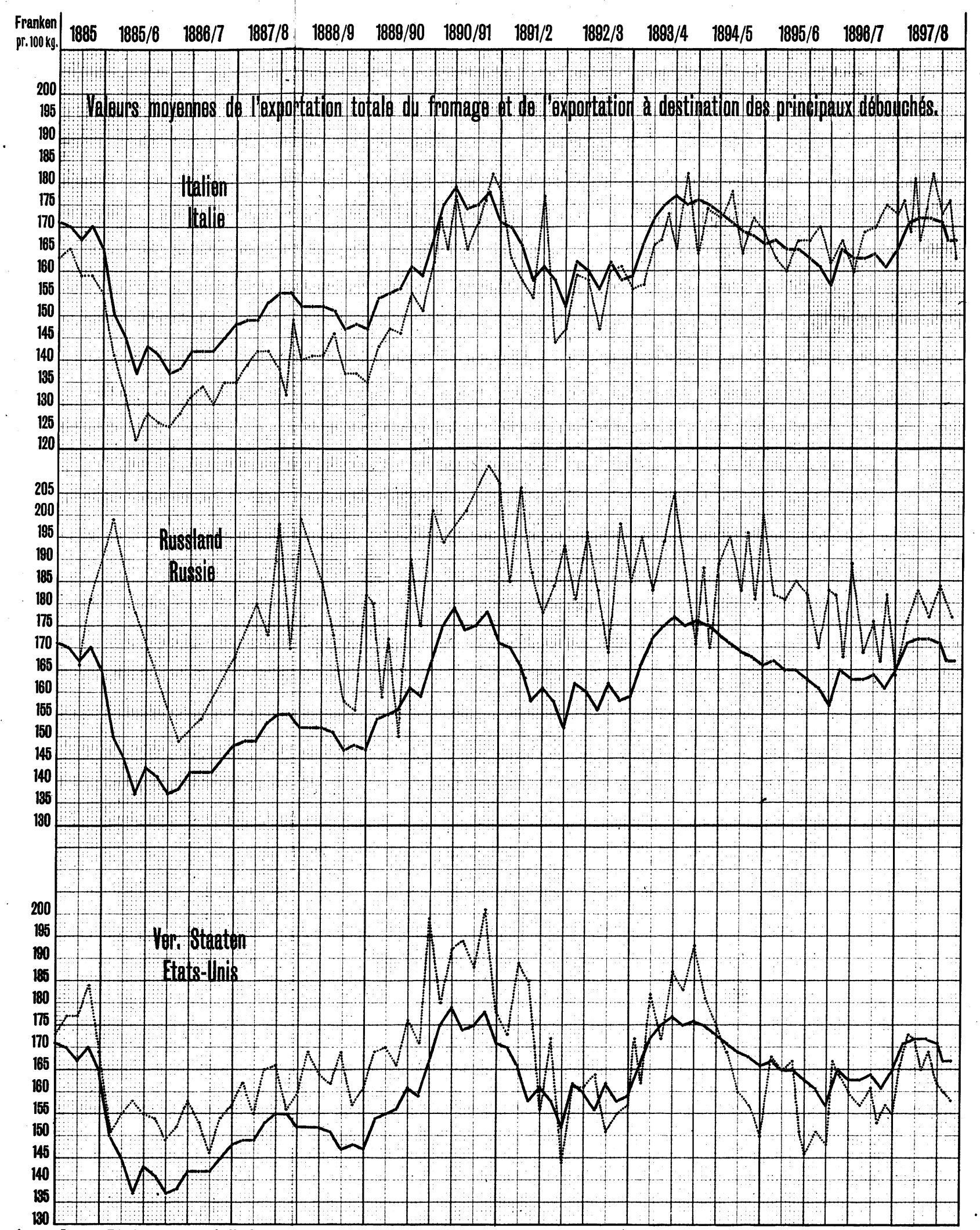
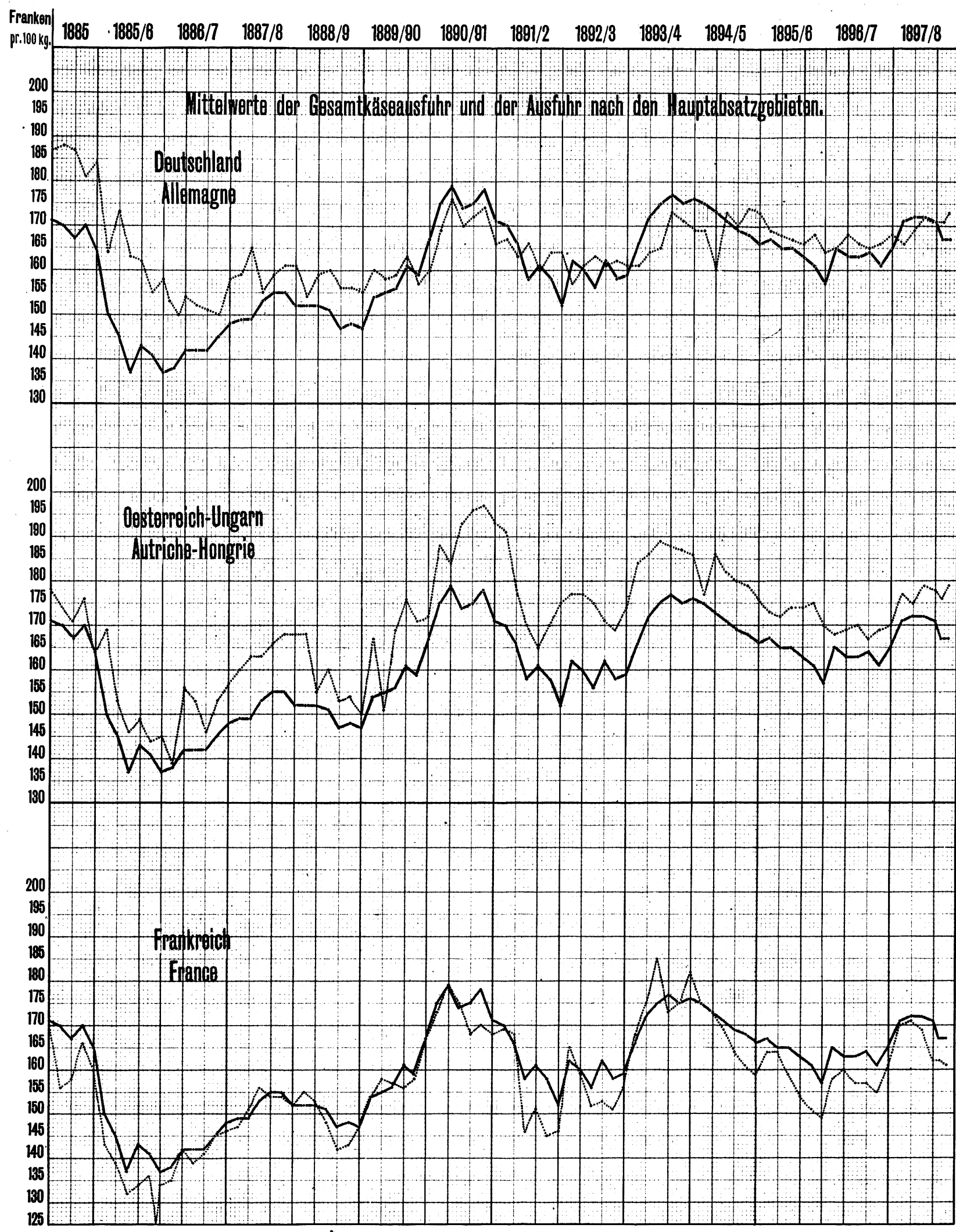
Il s'agit d'interpoler ces chiffres. Ici $n=5$. On commence par sommer les chiffres donnés, et on divise le total par 5; on obtient ainsi

$$A_0 = 142\,873.2;$$

c'est la première approximation, donnée par la moyenne.

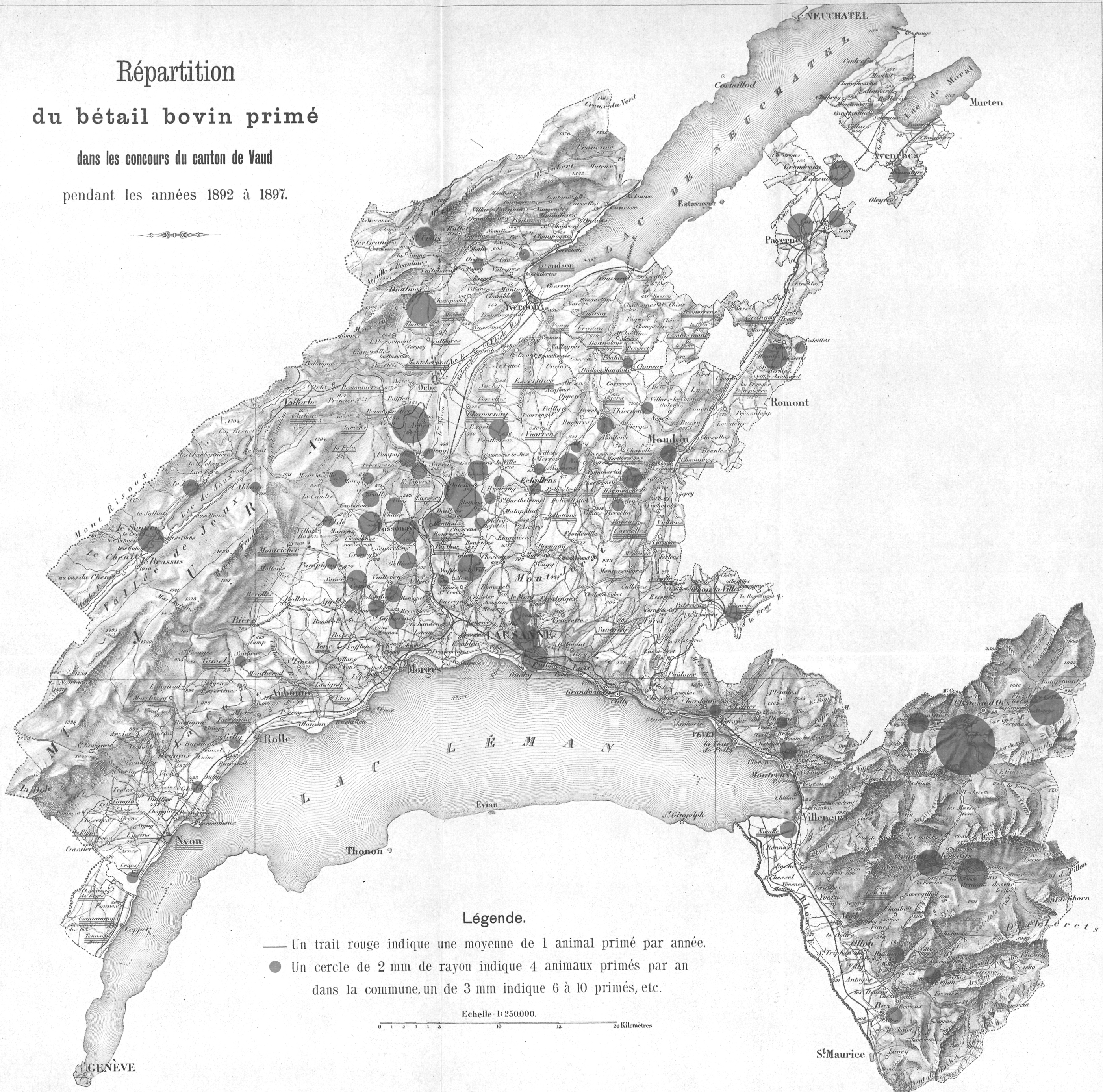
La deuxième approximation est donnée par une droite. On multiplie les nombres donnés par z , et l'on somme, en tenant compte des signes

$$\begin{aligned} - 2 \times 145\,664 &= - 291\,328 \\ - 1 \times 135\,845 &= - 135\,845 \\ 0 \times 138\,230 &= 0 \\ + 1 \times 141\,883 &= + 141\,883 \\ + 2 \times 152\,744 &= + 305\,488 \\ \hline & \text{somme } + 20\,198 \end{aligned}$$



Répartition du bétail bovin primé

dans les concours du canton de Vaud
pendant les années 1892 à 1897.



Légende.

- Un trait rouge indique une moyenne de 1 animal primé par année.
- Un cercle de 2 mm de rayon indique 4 animaux primés par an dans la commune, un de 3 mm indique 6 à 10 primés, etc.

Echelle 1:250.000.

0 1 2 3 4 5 10 15 20 Kilomètres

Il faut diviser cette somme par la somme des carrés de z ; on la trouvera dans la table IV, elle est 10. On aura donc

$$A_1 = B_1 = \frac{20\ 198}{10} = 2\ 019.8.$$

La deuxième approximation est donnée par une parabole de 2^e degré. On multiplie les nombres donnés par ψ'_2 et l'on somme, en tenant compte des signes

$$\begin{aligned} + 6 \times 145\ 664 &= + 873\ 984 \\ - 3 \times 135\ 845 &= - 407\ 535 \\ - 6 \times 138\ 230 &= - 829\ 380 \\ - 3 \times 141\ 883 &= - 425\ 649 \\ + 6 \times 152\ 744 &= + 916\ 464 \\ \text{somme} &+ 127\ 884 \end{aligned}$$

Il faut diviser cette somme par la somme des carrés de ψ'_2 , on la trouvera dans la table IV. On aura

$$B_2 = \frac{127\ 884}{126} = 1\ 014.95\ 238.$$

La valeur de P_2 se trouve au commencement de la table I, et l'on a

$$A_2 = P_2 B_2 = 3 B_2 = 3\ 044.85\ 714.$$

On continue de même pour le troisième degré

$$\begin{aligned} - 1.2 \times 145\ 664 &= - 174\ 796.8 \\ + 2.4 \times 135\ 845 &= + 326\ 028.0 \\ 0 \times 138\ 230 &= 0 \\ - 2.4 \times 141\ 883 &= - 340\ 519.2 \\ + 1.2 \times 152\ 744 &= + 183\ 292.8 \\ \text{somme} &- 5\ 995.2 \end{aligned}$$

La somme des carrés de ψ'_3 est 14.4, et l'on a

$$B_3 = - \frac{5\ 995.2}{14.4} = - 416.33\ 333$$

$$A_3 = P_3 B_3 = B_3 = - 416.33\ 333.$$

On a maintenant

$$y = A_0 + A_1 z + A_2 \psi_2 + A_3 \psi_3 + \dots$$

ou bien

$$y = B_0 + B_1 z + B_2 \psi'_2 + B_3 \psi'_3 + \dots$$

C'est de cette dernière formule qu'on se servira pour calculer les valeurs de y qui correspondent aux valeurs de z , -2 , -1 , 0 , $+1$, $+2$.

En ne conservant que le premier terme, B_0 , on a les écarts suivants, ϵ_0 :

| | | | | | |
|--------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| y | 145 664, | 135 845, | 138 230, | 141 883, | 152 744, |
| X_0 | 142 873.2, | 142 873.2, | 142 873.2, | 142 873.2, | 142 873.2, |
| ϵ_0 | + 2 790.8, | - 7 028.2, | - 4 643.2, | - 990.2, | + 9 870.8. |

Si nous conservons deux termes, nous aurons

$$X_1 = B_0 + B_1 z$$

et les écarts seront ϵ_1 ; de même, en conservant trois termes, on aura les écarts ϵ_2 , etc.

| z | ϵ_0 | ϵ_1 | ϵ_2 | ϵ_3 |
|-----|--------------|--------------|----------------|----------------|
| -2 | + 2 790.8 | + 6 830.4 | + 740.68 572 | + 241.08 572 |
| -1 | - 7 028.2 | - 5 008.4 | - 1 963.54 286 | - 964.34 286 |
| 0 | - 4 643.2 | - 4 643.2 | + 1 446.51 428 | + 1 446.51 428 |
| +1 | - 990.2 | - 3 010.0 | + 34,85 714 | - 964.34 286 |
| +2 | + 9 870.8 | + 5 831.2 | - 258.51 428 | + 241.08 572 |

On peut calculer les sommes des carrés des écarts de deux manières: directement et au moyen des formules données dans l'introduction. On a ainsi une vérification de tous les calculs.

On commence par faire la somme des carrés de ϵ_0 , et des carrés de ϵ_1 .

| ϵ_0^2 | ϵ_1^2 |
|--|--|
| 7 788 564.64 | 46 654 364.16 |
| 49 395 595.24 | 25 084 070.56 |
| 21 559 306.24 | 21 559 306.24 |
| 980 496.04 | 9 060 100.00 |
| 97 432 692.64 | 34 002 893.44 |
| $\Sigma \epsilon_0^2 = 177\ 156\ 654.80$ | $\Sigma \epsilon_1^2 = 136\ 360\ 734.40$ |

Nous avons posé

$$E_h = \Sigma \epsilon_h^2;$$

donc

$$E_1 - E_0 = \Sigma \epsilon_1^2 - \Sigma \epsilon_0^2 = - 40\ 795\ 920.40.$$

Mais nous avons trouvé

$$E_1 - E_0 = - \frac{(\Sigma y \psi_1)^2}{\Sigma \psi_1^2}$$

par conséquent

$$E_1 - E_0 = - \frac{(20\ 198)^2}{10} = - 40\ 795\ 920.40.$$

Cette valeur est égale à celle que nous avons déjà trouvée, ce qui vérifie les calculs.

On aura d'une manière semblable

| ϵ_2^2 |
|-----------------------------------|
| 548 615.336 |
| 3 855 500.563 |
| 2 092 403.562 |
| 1 215.020 |
| 66 829.634 |
| $E_2 = 6\ 564\ 564.115$ |
| $E_1 = 136\ 360\ 734.400$ |
| $E_2 - E_1 = - 129\ 796\ 170.285$ |

Pour calculer cette quantité de la seconde manière, on observera que

$$E_{h+1} - E_h = - \frac{(\Sigma y \psi_h)^2}{\Sigma \psi_h^2} = - \frac{(\Sigma y \psi'_h)^2}{\Sigma \psi'^2_h};$$

donc

$$E_2 - E_1 = - \frac{(127\ 884)^2}{126} = - 129\ 796\ 170.285;$$

ce qui vérifie les calculs.

On continue semblablement à calculer $E_3 - E_2$, $E_4 - E_3, \dots$

Le développement selon les ψ n'est, en général, qu'un moyen pour arriver au développement selon les puissances de z . On obtiendra celui-ci en faisant usage de la table V.

Dans notre exemple, en nous arrêtant à ψ_3 , nous aurons

$$y' = M_0 + M_1 z + M_2 z^2 + M_3 z^3$$

$$M_0 = A_0 - (2.0) A_2, \quad M_1 = A_1 - (3.1) A_3, \quad M_2 = A_2, \\ M_3 = A_3.$$

Les calculs sont les suivants:

| | |
|-----------|--------------------------------|
| (Table V) | $\log A_2 = 3.483\ 5669$ |
| | $\log (2.0) = 0.301\ 0300$ |
| | $\log (2.0) A_2 = 3.784\ 5969$ |
| | $A_0 = 142\ 873.2$ |
| | $(2.0) A_2 = 6\ 089.714$ |
| | $M_0 = 136\ 783.486$ |
| | $\log A_3 = 2.619\ 4412$ |
| | $\log (3.1) = 0.531\ 4789$ |
| | $\log (3.1) A_3 = 3.150\ 9201$ |
| | $(3.1) A_3 = - 1\ 415.533$ |
| | $A_1 = 2\ 019.8$ |
| | $-(3.1) A_3 = 1\ 415.533$ |
| | $M_1 = 3\ 435.333$ |

Enfin

$$y' = 136\ 783.486 + 3\ 435.333 z + 3\ 044.8571 z^2 - 416.3333 z^3.$$